



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Estados Coherentes Generalizados y
Estructura Analítica del Operador de
Aniquilación

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

EMILIO PISANTY ALATORRE

DIRECTOR DE TESIS:

DR. EDUARDO NAHMAD ACHAR



2011

Hoja de Datos del jurado

1. Datos del alumno

Pisanty

Alatorre

Emilio

56 55 33 51

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

304518562

2. Datos del tutor

Dr.

Eduardo

Nahmad

Achar

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Eugenio

Ley

Koo

4. Datos del sinodal 2

Dra.

Rocío

Jáuregui

Renaud

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Octavio Héctor

Castaños

Garza

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Pablo

Barberis

Blostein

7. Datos del trabajo escrito

Estados Coherentes Generalizados y Estructura Analítica del Operador de Aniquilación.

89 p

2011

*A mis maestros y mis padres,
mis compañeros y mi hermano,
y todos los que me vieron crecer.*

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Cuantización del campo electromagnético | 3 |
| 2.1. Descripción clásica | 3 |
| 2.2. Contenido energético | 6 |
| 2.3. Descripción hamiltoniana | 7 |
| 2.4. La solución clásica | 9 |
| 2.5. Cuantización | 11 |
| 3. Versión estándar de la cuantización | 19 |
| 3.1. Estructura del espacio estado | 19 |
| 3.2. El operador de momento | 22 |
| 3.3. El operador de número | 23 |
| 3.4. Operadores de creación y aniquilación | 26 |
| 3.4.1. Vectores propios | 26 |
| 3.4.2. Bloques de Jordan | 29 |
| 3.5. Productos internos | 38 |
| 3.6. Estados de número desplazados | 48 |
| 3.7. Evolución temporal y energía | 53 |
| 4. Número finito de fotones | 57 |
| 4.1. Primera cuadratura | 57 |
| 4.2. Espectro puntual de la primera cuadratura | 63 |
| 4.3. Cuadraturas arbitrarias | 68 |
| 4.4. La matriz de Jacobi | 69 |
| 5. Conclusiones | 75 |
| A. Productos internos II | 79 |
| B. Formulario | 83 |
| Bibliografía | 85 |

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo describe la cuantización del campo electromagnético para fines de la óptica cuántica, junto con dos temas específicos relacionados a dicha área. Particularmente, describe a detalle la estructura analítica del operador de aniquilación, para el cual se muestra la existencia de un bloque de Jordan infinito con valor propio igual a cada número complejo, y se estudian a las cuadraturas en espacios de número de fotones finito.

El capítulo 2 revisa el proceso de cuantización del campo electromagnético en regiones libres de carga, desde las ecuaciones de Maxwell hasta la formulación cuántica de la dinámica de cada modo normal del campo. Se utiliza un proceso formal que no depende de la solución clásica y, al no haber cargas, se evita toda referencia a los potenciales electromagnéticos. Así, se presenta una formulación hamiltoniana de la dinámica del campo, y su cuantización conforme al principio de cuantización canónica, puramente en términos de los campos eléctrico y magnético, \mathbf{E} y \mathbf{B} .

Este enfoque difiere del presentado en algunos libros de texto de óptica cuántica [21, 50] en que se trata a las componentes de Fourier del campo como cantidades complejas desde el inicio – como deben de ser – pero se cuantiza directamente con los campos, evitando las complicaciones que surgen si se consideran cargas y se cuantiza con potenciales [9, 31]. La esperanza es dar una presentación clara y completa de la cuantización del campo – salvo su interacción con la materia – accesible a estudiantes con conocimientos básicos de mecánica analítica y cuántica.

El capítulo 3 se enfoca en la estructura matemática de la descripción cuántica de un único modo normal del campo, derivando todos los resultados a partir de la relación de conmutación canónica $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. La primera parte del capítulo recoge resultados conocidos: en particular, el teorema de unicidad de von Neumann [57], que se presenta en libros de texto [8, 15, 35, 36] salvo por el tratamiento de la degeneración en \hat{x} , y algunos resultados estándar sobre el oscilador armónico cuántico.

Después de eso, se construyen los estados coherentes del oscilador armónico como estados propios del operador de aniquilación, y se generalizan a una sucesión de vectores propios generalizados, en el sentido de un bloque de Jordan, para *cada* valor propio complejo. Posteriormente se estudian las propiedades analíticas de estos estados



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

coherentes generalizados, incluyendo sus productos internos, relaciones de completez, y evolución temporal, y se demuestra que coinciden con una clase de estados, los estados de número desplazados, ya conocidos en la literatura.

En el capítulo 4 se estudian a las cuadraturas – es decir, la posición de un oscilador armónico, o el campo eléctrico o magnético de un modo normal del campo – cuando se les restringe a espacios con un número finito de fotones. Se estudia su espectro y se presenta una solución bastante elegante para su diagonalización.

En particular, se demuestra que su polinomio característico es – salvo por constantes – igual a un polinomio de Hermite, y que dichos polinomios juegan un papel crucial al encontrar los vectores propios. Se relaciona este procedimiento con formalismos más generales y se estudia la forma exacta en que este operador y su espectro se acercan a la forma del operador completo (la cuadratura sin restringir) cuando tiende a infinito el número de fotones accesibles.

Finalmente, se incluyen dos apéndices. Uno incluye la derivación del producto interno más general entre estados coherentes generalizados, que se presenta aparte por consistir en cálculos largos y que no revelan nada particularmente nuevo sobre las estructuras en juego.

Un segundo apéndice contiene los resultados más importantes utilizados en la construcción de los estados coherentes generalizados, y se incluye para ayudar al lector a navegar las partes más técnicas de dicha construcción.

Capítulo 2

Cuantización del campo electromagnético

2.1. Descripción clásica

El campo electromagnético es útil para describir las fuerzas eléctricas y magnéticas entre cargas y corrientes. Su descripción clásica es mediante dos campos vectoriales, el *campo de intensidad eléctrica* \mathbf{E} y el *campo de inducción magnética* \mathbf{B} , y la asignación de una *carga eléctrica* q a cada partícula. Dichos elementos están controlados por las ecuaciones de Maxwell [23, 46],

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2.1a}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.1b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2.1c}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{2.1d}$$

donde ρ es la densidad de carga y \mathbf{J} es la densidad de corriente, y por la fuerza de Lorentz, que actúa sobre una partícula de carga q y velocidad \mathbf{v} ,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{2.2}$$

Con esta estructura básica se construye la teoría electromagnética clásica, que explica con toda la precisión necesaria una gama muy amplia de fenómenos. Sin embargo, hay algunos fenómenos que hacen necesaria una versión cuántica de esta teoría, entre los cuales quizá el más evidente es la radiación de cuerpo negro, que dio base a toda la mecánica cuántica.

Consideramos por simplicidad, de entrada, una región cúbica del espacio, de lado L , sin cargas en su interior. En ese caso, la dinámica del campo se describe por las

ecuaciones de Maxwell en el vacío,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.3b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.3c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.3d)$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, y como tal requiere condiciones iniciales y de frontera para especificar su solución, $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$, únicamente. Las primeras son esenciales para cualquier sistema dinámico, mientras que las segundas son condiciones puramente geométricas, y por ello cambian según la situación que se desee describir.

Consideraremos, por sencillez, condiciones de frontera periódicas, que requieren que ambos campos, y sus derivadas, sean iguales en puntos opuestos de la frontera. Sin embargo, esa no es la única opción razonable; por ejemplo, puede pedirse que ambos campos se anulen en la frontera, lo cual corresponde a que la región en consideración sea el interior de una cavidad con paredes reflejantes.

La solución clásica de este sistema es mediante la descomposición de \mathbf{E} y \mathbf{B} en series de Fourier: como soluciones a un sistema de ecuaciones diferenciales, se les supone continuamente diferenciables tanto en el tiempo como en el espacio, de modo que pueden expresarse como combinación lineal de funciones trigonométricas. En particular, puede escribirse

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad \text{y} \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{B}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (2.4b)$$

donde $\mathbf{E}_{-\mathbf{k}}(t) = \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)^*$ y $\mathbf{B}_{-\mathbf{k}}(t) = \mathbf{B}_{\mathbf{k}}(t)^*$ para asegurar que $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ sean reales, y \mathbf{k} recorre un conjunto discreto de vectores en \mathbb{R}^3 que queda fijado por las condiciones de frontera.

En nuestro caso, con condiciones de frontera periódicas, los vectores de onda admisibles son $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(m_x, m_y, m_z)$ para enteros m_x, m_y, m_z . Si se tuvieran, por ejemplo, paredes reflejantes en la frontera, los vectores de onda admisibles son $\mathbf{k} = \frac{\pi}{L}(m_x, m_y, m_z)$ para enteros m_x, m_y, m_z , y las condiciones sobre $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)$ y $\mathbf{B}_{\mathbf{k}}(t)$ cambian. En general, sin embargo, se tiene un conjunto numerable y discreto de vectores de onda.

En términos de las componentes de Fourier de los campos, las ecuaciones de Max-

well se expresan

$$\begin{aligned}\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_k &= 0 \\ i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_k &= -\frac{d\mathbf{B}_k}{dt} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_k &= 0 \\ i\mathbf{k} \times \mathbf{B}_k &= \mu_0\epsilon_0 \frac{d\mathbf{E}_k}{dt},\end{aligned}$$

y pueden separarse derivando:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{E}_k}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\mu_0\epsilon_0} i\mathbf{k} \times \mathbf{B}_k = \frac{i}{\mu_0\epsilon_0} \mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{B}_k}{dt} = -\frac{i}{\mu_0\epsilon_0} \mathbf{k} \times (i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_k) \\ &= \frac{1}{\mu_0\epsilon_0} [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_k)\mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\mathbf{E}_k] = -\frac{|\mathbf{k}|^2}{\mu_0\epsilon_0} \mathbf{E}_k,\end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{d^2\mathbf{E}_k}{dt^2} + \omega_k^2 \mathbf{E}_k = 0 \quad (2.5)$$

para $\omega_k = |\mathbf{k}|/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = c|\mathbf{k}|$. Análogamente, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{B}_k}{dt^2} &= -\frac{d}{dt} i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_k = -i\mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{E}_k}{dt} = -\frac{i}{\mu_0\epsilon_0} \mathbf{k} \times (i\mathbf{k} \times \mathbf{B}_k) \\ &= \frac{1}{\mu_0\epsilon_0} [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_k)\mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\mathbf{B}_k] = -\frac{|\mathbf{k}|^2}{\mu_0\epsilon_0} \mathbf{B}_k = -\omega_k^2 \mathbf{B}_k(t).\end{aligned} \quad (2.6)$$

Sin embargo, \mathbf{E}_k y \mathbf{B}_k no son funciones independientes: si se conoce $\mathbf{E}_k(t)$ puede encontrarse $\mathbf{B}_k(t)$ mediante la expresión

$$i\mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{B}_k}{dt} = -i\mathbf{k} \times (i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_k) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_k)\mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\mathbf{E}_k = -|\mathbf{k}|^2 \mathbf{E}_k. \quad (2.7)$$

Más aún, ambas funciones deben cumplir $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_k = 0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_k$. Por ello pueden escogerse *dos* vectores unitarios \mathbf{e}_{k1} y \mathbf{e}_{k2} para cada vector de onda k de manera que $\mathbf{E}_k(t) = E_{k1}(t)\mathbf{e}_{k1} + E_{k2}(t)\mathbf{e}_{k2}$, $\mathbf{B}_k(t) = B_{k1}(t)\mathbf{e}_{k1} + B_{k2}(t)\mathbf{e}_{k2}$, y $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{k1} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{k2} = \mathbf{e}_{k1} \cdot \mathbf{e}_{k2} = 0$. Dichos vectores pueden ser reales, en cuyo caso representan luz de polarización lineal, pero en general serán complejos, representando polarización elíptica.

Aquí es importante notar que en general los vectores de polarización dependen de la posición y que es únicamente en coordenadas cartesianas que pueden suponerse constantes. Por ello, entre otras razones, el desarrollo de aquí en adelante sólo se generaliza a otras geometrías con bastante esfuerzo, por lo que es tema para otro trabajo.

2.2. Contenido energético

El elemento final de la descripción básica de la dinámica clásica del campo es su contenido energético, dado por la expresión $H = \frac{1}{2} \int_V \left(\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right) dV$. Dicha expresión puede ser simplificada en este contexto, recordando que $\int_0^L e^{ik \cdot \mathbf{x}} e^{ik' \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} = L \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}$ cuando $k = 2\pi m/L$ con m entero, como ocurre aquí. Por ello,

$$H = \frac{1}{2} \int_V \left(\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right) dV \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_V \left[\epsilon_0 \left(\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \cdot \left(\sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{E}_{\mathbf{k}'}(t) e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\mu_0} \left(\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{B}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \cdot \left(\sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{B}_{\mathbf{k}'}(t) e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \right) \right] dV \\ &= \frac{L^3}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left[\epsilon_0 |\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}_{\mathbf{k}}|^2 \right] \\ &= \frac{L^3}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left[\epsilon_0 (|E_{\mathbf{k}1}|^2 + |E_{\mathbf{k}2}|^2) + \frac{1}{\mu_0} (|B_{\mathbf{k}1}|^2 + |B_{\mathbf{k}2}|^2) \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$= \frac{L^3}{2} \sum_{\mathbf{k}, s} \left[\epsilon_0 |E_{\mathbf{k}s}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |B_{\mathbf{k}s}|^2 \right]. \quad (2.10)$$

Para obtener esta expresión utilizamos, en la tercera igualdad, las relaciones $\mathbf{E}_{-\mathbf{k}}(t) = \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)^*$ y $\mathbf{B}_{-\mathbf{k}}(t) = \mathbf{B}_{\mathbf{k}}(t)^*$. Asimismo, estas implican que $|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}| = |\mathbf{E}_{-\mathbf{k}}|$ y $|\mathbf{B}_{\mathbf{k}}| = |\mathbf{B}_{-\mathbf{k}}|$, de modo que en la última suma cada término $|E_{\mathbf{k}s}|^2$ o $|B_{\mathbf{k}s}|^2$ aparece *dos* veces.

En la electrodinámica con cargas, el cambio temporal de esta cantidad da el trabajo realizado por el campo sobre las cargas menos la potencia radiada por las mismas (igual al flujo del vector de Poynting, $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$, en la frontera de V), lo cual la identifica como la energía del campo y por lo tanto como la energía total del sistema en ausencia de cargas.

Sin embargo, existe una motivación mucho más sencilla para llamarle a (2.10) la energía de este sistema dinámico, ya que actúa como su hamiltoniano. Para hacer esto concreto, notamos primero que la relación (2.7) puede escribirse como

$$\begin{aligned} -|\mathbf{k}|^2 (E_{\mathbf{k}1}(t) \mathbf{e}_{\mathbf{k}1} + E_{\mathbf{k}2}(t) \mathbf{e}_{\mathbf{k}2}) &= -|\mathbf{k}|^2 \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) = i\mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{B}_{\mathbf{k}}}{dt} \\ &= i\mathbf{k} \times \frac{d}{dt} [B_{\mathbf{k}1}(t) \mathbf{e}_{\mathbf{k}1} + B_{\mathbf{k}2}(t) \mathbf{e}_{\mathbf{k}2}] = \frac{dB_{\mathbf{k}1}}{dt} i\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}1} + \frac{dB_{\mathbf{k}2}}{dt} i\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}2} \\ &= -i|\mathbf{k}| \frac{dB_{\mathbf{k}2}}{dt} \mathbf{e}_{\mathbf{k}1} + i|\mathbf{k}| \frac{dB_{\mathbf{k}1}}{dt} \mathbf{e}_{\mathbf{k}2} \quad \text{si } \{\mathbf{k}, \mathbf{e}_{\mathbf{k}1}, \mathbf{e}_{\mathbf{k}2}\} \text{ es un sistema derecho.} \end{aligned}$$

Entonces, definiendo $\sigma_{\mathbf{k}s} = -\frac{1}{|\mathbf{k}|} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s'}) \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}^*$ (escogiendo de aquí en adelante $s' = 2$ si $s = 1$, y viceversa), que puede suponerse real y en general es igual a ± 1 , lo

anterior se escribe

$$|\mathbf{k}|E_{\mathbf{k}s} = i\sigma_{\mathbf{k}s}\frac{dB_{\mathbf{k}s'}}{dt}, \quad (2.11)$$

de modo que si se identifica a $B_{\mathbf{k}s}$, donde $s = 1, 2$ y \mathbf{k} recorre los vectores de onda admisibles, como la “posición” del sistema, entonces las coordenadas $E_{\mathbf{k}s}$ pueden pensarse como su “momento”.

2.3. Descripción hamiltoniana

Para hacer esto preciso, definimos variables canónicas $q_{\mathbf{k}s}(t) = \alpha_{\mathbf{k}}B_{\mathbf{k}s}(t)$ (donde $\alpha_{\mathbf{k}}$ es una constante de normalización por determinar). Aquí hay que tener cuidado, pues dichas variables son complejas, lo cual altera ligeramente el formalismo hamiltoniano. Además sabemos que para que el campo sea una función real de la posición debe tenerse $q_{-\mathbf{k}s} = q_{\mathbf{k}s}^*$ por lo que únicamente la mitad de las $q_{\mathbf{k}s}$ serán variables independientes, aunque esto no es una preocupación inmediata.

Con variables complejas, las ecuaciones de Hamilton se expresan

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p^*} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q^*} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p^*} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q^*} \end{array} \right. \quad (2.13)$$

donde en el hamiltoniano H , igual a la energía del sistema, se consideran a q , q^* , p y p^* como variables independientes al tomar las derivadas parciales. Así, nos interesa calcular las derivadas parciales

$$\frac{\partial H}{\partial E_{\mathbf{k}s}^*} = \epsilon_0 V E_{\mathbf{k}s} \quad \text{y} \quad \frac{\partial H}{\partial B_{\mathbf{k}s}^*} = \frac{V}{\mu_0} B_{\mathbf{k}s},$$

donde $V = L^3$. El factor de $\frac{1}{2}$ de la ecuación (2.10) desaparece pues cada término aparece dos veces, y aunque al derivar con respecto a $E_{\mathbf{k}s}^*$ en este formalismo debe tratarse a $E_{\mathbf{k}s}$ como constante, tenemos $E_{-\mathbf{k}s} = E_{\mathbf{k}s}^*$.

Con esta nueva notación, la ecuación (2.11) se escribe

$$\frac{dq_{\mathbf{k}s}}{dt} = \alpha_{\mathbf{k}} \frac{dB_{\mathbf{k}s}}{dt} = -i\sigma_{\mathbf{k}s'}\alpha_{\mathbf{k}}|\mathbf{k}|E_{\mathbf{k}s'} = -i\sigma_{\mathbf{k}s'}\alpha_{\mathbf{k}}|\mathbf{k}|\frac{1}{\epsilon_0 V} \frac{\partial H}{\partial E_{\mathbf{k}s'}^*} = -\frac{\partial H}{\partial p_{\mathbf{k}s}^*},$$

si se escoge $p_{\mathbf{k}s} = \frac{-i\sigma_{\mathbf{k}s'}\epsilon_0 V}{\alpha_{\mathbf{k}}|\mathbf{k}|} E_{\mathbf{k}s'}$. Para asegurar que se cumpla la otra ecuación de Hamilton, calculamos

$$\frac{dp_{\mathbf{k}s}}{dt} = \frac{-i\sigma_{\mathbf{k}s'}\epsilon_0 V}{\alpha_{\mathbf{k}}|\mathbf{k}|} \frac{dE_{\mathbf{k}s'}}{dt} = \frac{-i\sigma_{\mathbf{k}s'}\epsilon_0 V}{\alpha_{\mathbf{k}}|\mathbf{k}|} \frac{d}{dt} \frac{i\sigma_{\mathbf{k}s'} dB_{\mathbf{k}s}}{|\mathbf{k}|} = \frac{\epsilon_0 V}{\alpha_{\mathbf{k}}|\mathbf{k}|^2} \frac{d^2 B_{\mathbf{k}s}}{dt^2}$$

Es aquí donde resulta necesario recurrir a nuestra descripción anterior del campo, codificada en las ecuaciones (2.5) y (2.6). Con la segunda, lo anterior se reduce a

$$\frac{dp_{\mathbf{k}s}}{dt} = -\frac{\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}}^2}{\alpha_{\mathbf{k}}|\mathbf{k}|^2} B_{\mathbf{k}s} = -\frac{\epsilon_0 V c^2}{\alpha_{\mathbf{k}}} B_{\mathbf{k}s} = -\frac{1}{\alpha_{\mathbf{k}}} \frac{V}{\mu_0} B_{\mathbf{k}s},$$

misma que puede expresarse de la forma

$$\frac{dp_{\mathbf{k}s}}{dt} = -\frac{1}{\alpha_{\mathbf{k}}} \frac{\partial H}{\partial B_{\mathbf{k}s}^*} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\mathbf{k}s}^*}$$

sin importar el valor de $\alpha_{\mathbf{k}}$.

Encontramos así que, de manera “natural”, al escoger al momento $p_{\mathbf{k}s}$ conjugado a $q_{\mathbf{k}s}$ de manera apropiada para satisfacer la primera ecuación (“cinemática”) de Hamilton, la segunda ecuación (“dinámica”)¹ resulta equivalente a la dinámica del campo, descrita por (2.6). Sin embargo, lo natural de este hecho es una ilusión, ya que en estos cálculos la forma específica del hamiltoniano es crucial; más bien, esta coincidencia es exactamente la justificación para escoger a (2.10) como el hamiltoniano del sistema.

Esto zanja, en buena medida, la pregunta del significado de la “energía” que se le pueda asignar al campo electromagnético en esta situación. Como sistema dinámico, el campo admite una descripción hamiltoniana: es decir, a través de pares de coordenadas conjugadas cuya evolución se gobierna por una función real de las mismas, el hamiltoniano, a través de las ecuaciones de Hamilton. Como dicho hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, el teorema de Noether garantiza la existencia de una cantidad conservada por la dinámica; dicha cantidad es la que normalmente se identifica como energía y es exactamente el hamiltoniano.

En términos de las variables canónicas, el hamiltoniano se expresa

$$\begin{aligned} H &= \frac{V}{2} \sum_{\mathbf{k},s} \left[\epsilon_0 |E_{\mathbf{k}s}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |B_{\mathbf{k}s}|^2 \right] \\ &= \frac{V}{2} \sum_{\mathbf{k},s} \left[\epsilon_0 \left| \frac{\alpha_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|}{-i\sigma_{\mathbf{k}s}\epsilon_0 V} p_{\mathbf{k}s'} \right|^2 + \frac{1}{\mu_0} \left| \frac{q_{\mathbf{k}s}}{\alpha_{\mathbf{k}}} \right|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},s} \left[\epsilon_0 V \frac{\alpha_{\mathbf{k}}^2 |\mathbf{k}|^2}{\epsilon_0^2 V^2} |p_{\mathbf{k}s}|^2 + \frac{V}{\mu_0 \alpha_{\mathbf{k}}^2} |q_{\mathbf{k}s}|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},s} \left[\frac{\alpha_{\mathbf{k}}^2 |\mathbf{k}|^2}{\epsilon_0 V} |p_{\mathbf{k}s}|^2 + \frac{V}{\mu_0 \alpha_{\mathbf{k}}^2} |q_{\mathbf{k}s}|^2 \right]. \end{aligned}$$

Aquí se toma, para llevar al hamiltoniano a su forma estándar, $\alpha_{\mathbf{k}} = \sqrt{\epsilon_0 V}/|\mathbf{k}|$, de modo que

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},s} \left[|p_{\mathbf{k}s}|^2 + \frac{V|\mathbf{k}|^2}{\mu_0 \epsilon_0 V} |q_{\mathbf{k}s}|^2 \right] = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},s} [|p_{\mathbf{k}s}|^2 + c^2 |\mathbf{k}|^2 |q_{\mathbf{k}s}|^2]$$

¹Estos nombres se justifican fácilmente observando el hamiltoniano de una partícula en una dimensión, $H = p^2/2m + V(q)$, para el cual la primera ecuación es $\dot{q} = p/m$, que refleja básicamente la definición del momento y por ello la cinemática de la partícula; la segunda ecuación es la segunda Ley de Newton, $\dot{p} = -\frac{dV}{dq}$, y como tal describe la dinámica del problema.

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, s} [|p_{\mathbf{k}s}|^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 |q_{\mathbf{k}s}|^2]. \quad (2.14)$$

(Esto implica que las dimensiones de $\alpha_{\mathbf{k}}$ son $[\alpha_{\mathbf{k}}] = [\sqrt{\epsilon_0 V / |\mathbf{k}|^2}] = \text{m}^{5/2} [\sqrt{\epsilon_0}] = \text{m}^{5/2} \text{C} / \text{kg}^{1/2} \text{m}^{3/2} \text{s}^{-1} = \text{kg}^{-1/2} \text{m s C}$, lo cual hace que las dimensiones de $q_{\mathbf{k}s}$ sean $[q_{\mathbf{k}s}] = [\alpha_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k}s}] = \text{kg}^{-1/2} \text{m s C} [B_{\mathbf{k}s}] = \text{kg}^{-1/2} \text{m s} [QB_{\mathbf{k}s}] = \text{kg}^{-1/2} \text{m s} [F/v] = \text{kg}^{1/2} \text{m}$, es decir, dimensiones de posición salvo por un factor de $\sqrt{\text{masa}}$. Ello corresponde al hecho de que la forma estándar del hamiltoniano es la de un oscilador armónico de masa unitaria. Análogamente, $[p_{\mathbf{k}s}] = \text{kg}^{1/2} \text{m s}^{-1}$.)

En resumen, entonces, la dinámica clásica del campo electromagnético libre en una región finita se describe mediante pares conjugados de coordenadas canónicas, $q_{\mathbf{k}s}$ y $p_{\mathbf{k}s}$, proporcionales a las componentes de Fourier de los campos magnético y eléctrico, $B_{\mathbf{k}s} = (|\mathbf{k}| / \sqrt{\epsilon_0 V}) q_{\mathbf{k}s}$ y $E_{\mathbf{k}s} = (i\sigma_{\mathbf{k}s} / \sqrt{\epsilon_0 V}) p_{\mathbf{k}s}$, que dan lugar a los campos mediante sus series de Fourier,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{k}, s} E_{\mathbf{k}s}(t) \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad \text{y} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{k}, s} B_{\mathbf{k}s}(t) \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Las variables conjugadas obedecen las ecuaciones de Hamilton,

$$\begin{cases} \frac{dp_{\mathbf{k}s}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\mathbf{k}s}^*} \\ \frac{dq_{\mathbf{k}s}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{\mathbf{k}s}^*}, \end{cases}$$

con un hamiltoniano de oscilador armónico en cada par de variables,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, s} [|p_{\mathbf{k}s}|^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 |q_{\mathbf{k}s}|^2].$$

2.4. La solución clásica

Los resultados anteriores expresan la dinámica del campo electromagnético en cuanto a la forma clásica de describirla y las ecuaciones que la gobiernan, pero hasta ahora no se han resuelto dichas ecuaciones. Antes de trasladar la dinámica ya obtenida al dominio cuántico, nos enfocamos en presentar algunos detalles de la solución clásica.

Dejando de lado, de momento, la descripción hamiltoniana, consideremos la dinámica del campo eléctrico, únicamente. Ésta puede resumirse en su serie de Fourier (2.4a),

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}},$$

y la ecuación de oscilador armónico tridimensional (2.5) que gobierna las componentes de la serie,

$$\frac{d^2 \mathbf{E}_{\mathbf{k}}}{dt^2} + \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{E}_{\mathbf{k}} = 0,$$

bajo la restricción de que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}} = 0$. Adicionalmente, debe cumplirse $\mathbf{E}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^*$ para asegurar que el campo sea real.

La solución de este problema es bien conocida. Cada componente del campo oscila senoidalmente, y las distintas componentes cartesianas de un mismo modo de Fourier lo hacen a la misma frecuencia aunque no necesariamente con la misma fase. Por ello la solución general es

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^+ e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^- e^{+i\omega_{\mathbf{k}}t}, \quad (2.15)$$

donde *no* se requiere que las constantes $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^+$ y $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^-$ sean conjugados, ya que $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ puede ser complejo. En cambio, lo que debe ocurrir es que $\mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^+ = \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{-*}$ y $\mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^- = \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{+*}$. Además, debe tenerse $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^- = \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^+ = 0$.

Ahora bien, la serie de Fourier de \mathbf{E} puede reacomodarse de manera que sea evidente que el campo es real, juntando en un mismo término los sumandos correspondientes a los vectores de onda \mathbf{k} y $-\mathbf{k}$. Para ello, se escoge uno de cada par de vectores $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ de manera arbitraria pero fija (por ejemplo, se toman aquellos con coordenada x positiva). Entonces, si denotamos con $\sum_{\mathbf{k}}$ a la sumatoria únicamente sobre los vectores elegidos (es decir, sobre uno de cada par $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$), se tiene

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{k}} \left[\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right].$$

De ahí, sustituyendo la solución (2.15) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} \left[\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \left[(\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^+ e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^- e^{+i\omega_{\mathbf{k}}t}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + (\mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^+ e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^- e^{+i\omega_{\mathbf{k}}t}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \left[\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^+ e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^{+*} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega_{\mathbf{k}}t)} + \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^- e^{i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{-*} e^{i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega_{\mathbf{k}}t)} \right], \end{aligned}$$

ya que $\mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^+ = \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{-*}$ y $\mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^- = \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{+*}$. Luego, intercambiando el segundo y cuarto términos, se tiene

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \left[\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^+ e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{-*} e^{i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega_{\mathbf{k}}t)} + \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^- e^{i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^{+*} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega_{\mathbf{k}}t)} \right].$$

Aquí los segundos dos términos son iguales a los primeros dos, cambiando \mathbf{k} por $-\mathbf{k}$,

de modo que los podemos juntar, recuperando una suma sobre todas las \mathbf{k} :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} \left[\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^+ e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{+*} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \left[(\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^+ e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + (\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^+ e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t})^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \left[\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^+(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^+(t)^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^+(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right],\end{aligned}$$

donde $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^+(t) = \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^+ e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}$ cumple la ecuación diferencial

$$\frac{d\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^+(t)}{dt} + i\omega_{\mathbf{k}}\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^+(t) = 0.$$

Es decir, $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^+(t)$ está en el kernel del operador diferencial $\frac{d}{dt} + i\omega_{\mathbf{k}}$, uno de los dos factores del operador

$$\frac{d^2}{dt^2} + \omega_{\mathbf{k}}^2 = \left(\frac{d}{dt} + i\omega_{\mathbf{k}} \right) \left(\frac{d}{dt} - i\omega_{\mathbf{k}} \right) = \left(\frac{d}{dt} - i\omega_{\mathbf{k}} \right) \left(\frac{d}{dt} + i\omega_{\mathbf{k}} \right),$$

en cuyo kernel se encuentra $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)$. Análogamente, $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^-(t) = \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^+ e^{+i\omega_{\mathbf{k}}t}$ está en el kernel de $\frac{d}{dt} - i\omega_{\mathbf{k}}$. $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^+(t)$ y $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^-(t)$ se conocen como las partes de frecuencia positiva y negativa, respectivamente, de $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)$.

Así, puede verse al campo eléctrico como la suma de componentes de Fourier oscilando todas con frecuencia positiva. Esto es equivalente a ver al campo como combinación lineal de ondas viajeras: $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} 2 \operatorname{Re} [\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^+ e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)}]$, tomando como distintas a las ondas que viajan en direcciones opuestas.

Es importante notar que para lograr esta separación del campo en componentes de frecuencia positiva y negativa fue necesario resolver clásicamente la dinámica del campo. En particular, eso implica que la descripción del campo posterior a la solución no puede ser cuantizada canónicamente. Esto se debe a que la cuantización canónica se realiza al nivel del hamiltoniano y sus variables, pero no de sus soluciones.

2.5. Cuantización

Consideramos ahora la versión cuántica del sistema que hemos descrito hasta ahora. Tenemos ya la descripción hamiltoniana del campo dentro de la cavidad, que se resume en las ecuaciones al final de la sección 2.3; a partir de ella obtendremos la descripción cuántica mediante el proceso de cuantización canónica.

Este procedimiento requiere de un sistema hamiltoniano, es decir, un sistema descrito por pares de variables conjugadas y una función escalar de ellas, el hamiltoniano, cuya dinámica obedece las ecuaciones de Hamilton; con estos elementos, se reemplazan

las coordenadas canónicas q y p por operadores autoadjuntos \hat{q} y \hat{p} en un espacio de Hilbert, que deben cumplir con el conmutador canónico

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (2.16)$$

Sin embargo, nuestra situación no es exactamente esa, ya que nuestras variables canónicas, $q_{\mathbf{k}s} = \frac{\sqrt{\epsilon_0 V}}{|\mathbf{k}|} B_{\mathbf{k}s}$ y $p_{\mathbf{k}s} = -i\sigma_{\mathbf{k}s'} \sqrt{\epsilon_0 V} E_{\mathbf{k}s'}$, son cantidades complejas, y separarlas en sus partes real e imaginaria rompe la simetría entre ellas.² Para atacar este problema, en vez de separar artificialmente dichas variables, consideramos la cuantización canónica estándar en términos de variables complejas, siguiendo el tratamiento en [9, pp. 87-90].

Consideramos, entonces, un sistema hamiltoniano con variables canónicas q_1, q_2 y p_1, p_2 , lagrangiano L y hamiltoniano H . Definimos entonces una posición compleja mediante

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_1 + iq_2).$$

El cambio de variable es invertible si se consideran a Q y Q^* como variables independientes:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q + Q^*) \\ q_2 = \frac{1}{i\sqrt{2}} (Q - Q^*). \end{cases}$$

Entonces, con este formalismo, quedan claras las identificaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Q} &= \frac{\partial q_1}{\partial Q} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial q_2}{\partial Q} \frac{\partial}{\partial q_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} - i \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \quad y \\ \frac{\partial}{\partial Q^*} &= \frac{\partial q_1}{\partial Q^*} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial q_2}{\partial Q^*} \frac{\partial}{\partial q_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} + i \frac{\partial}{\partial q_2} \right). \end{aligned}$$

Quisiéramos definir, además, un momento complejo conjugado a Q , cuya definición natural es $P = \frac{1}{\sqrt{2}} (p_1 + ip_2)$, lo cual hace a p_1 y p_2 equivalentes a P y P^* de manera idéntica. Las ecuaciones de Hamilton para Q y P son entonces

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{dq_1}{dt} + i \frac{dq_2}{dt} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial H}{\partial p_1} + i \frac{\partial H}{\partial p_2} \right) = \frac{\partial H}{\partial P^*}, \quad y \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{dp_1}{dt} + i \frac{dp_2}{dt} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial H}{\partial q_1} + i \frac{\partial H}{\partial q_2} \right) = -\frac{\partial H}{\partial Q^*}, \end{aligned}$$

como ya habíamos escrito.

Ahora bien, al cuantizar el sistema mediante la cuantización canónica, con respecto a q_1, q_2 y p_1, p_2 , se obtienen \hat{q}_1, \hat{q}_2 y \hat{p}_1, \hat{p}_2 , que cumplen el conmutador $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$. La posición y el momento complejos, en cambio, tendrán su contraparte en los operadores

$$\hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}_1 + i\hat{q}_2) \quad y \quad \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{p}_1 + i\hat{p}_2),$$

² Esta simetría es, de hecho, una simetría de traslación: si se mueve la caja, cambiando \mathbf{x} por $\mathbf{x} + \mathbf{x}_0$, en la suma (2.4) eso equivale a cambiar $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ por $\mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0}$, lo cual mezcla las partes real e imaginaria de cada variable canónica.

respectivamente, que no necesitan ser autoadjuntos al ser Q y P complejas; los adjuntos de \hat{Q} y \hat{P} ,

$$\hat{Q}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q}_1 - i\hat{q}_2) \quad \text{y} \quad \hat{P}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{p}_1 - i\hat{p}_2),$$

corresponden, por supuesto, a Q^* y P^* , respectivamente.

Entonces el conmutador canónico debe ser reemplazado por los varios conmutadores entre \hat{Q} , \hat{P} , y sus adjuntos:

$$\begin{aligned} [\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger] &= \frac{1}{2}[\hat{q}_1 + i\hat{q}_2, \hat{q}_1 - i\hat{q}_2] = 0, \\ [\hat{P}, \hat{P}^\dagger] &= \frac{1}{2}[\hat{p}_1 + i\hat{p}_2, \hat{p}_1 - i\hat{p}_2] = 0, \\ [\hat{Q}, \hat{P}] &= \frac{1}{2}[\hat{q}_1 + i\hat{q}_2, \hat{p}_1 + i\hat{p}_2] = 0, \\ [\hat{Q}^\dagger, \hat{P}^\dagger] &= \frac{1}{2}[\hat{q}_1 - i\hat{q}_2, \hat{p}_1 - i\hat{p}_2] = 0, \\ [\hat{Q}, \hat{P}^\dagger] &= \frac{1}{2}[\hat{q}_1 + i\hat{q}_2, \hat{p}_1 - i\hat{p}_2] = i\hbar, \\ [\hat{Q}^\dagger, \hat{P}] &= \frac{1}{2}[\hat{q}_1 - i\hat{q}_2, \hat{p}_1 + i\hat{p}_2] = i\hbar. \end{aligned}$$

De estos conmutadores, los primeros dos pudieran parecer triviales, pero no lo son: como Q y P conmutan con sus adjuntos, son operadores normales y por ello son diagonalizables; esto es exactamente lo mismo que decir que \hat{q}_1 y \hat{q}_2 (o \hat{p}_1 y \hat{p}_2) son diagonalizables simultáneamente. El conmutador $[\hat{Q}, \hat{P}^\dagger] = i\hbar$, por supuesto, es el crucial, en cuanto encarna el carácter cuántico de este sistema, pero los seis conmutadores de arriba son importantes si se intenta recuperar el conmutador original (2.16).

Regresando ahora al campo electromagnético, obtenemos así que la cuantización canónica requiere de la existencia de operadores $\hat{q}_{\mathbf{k}s}$ y $\hat{p}_{\mathbf{k}s}$ para cada modo, mismos que deben obedecer el conmutador

$$[\hat{q}_{\mathbf{k}s}, \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger] = i\hbar\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{ss'}.$$

Igualmente, el hamiltoniano del sistema será ahora el operador

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left[\hat{p}_{\mathbf{k}s} \hat{p}_{\mathbf{k}s}^\dagger + \omega_{\mathbf{k}}^2 \hat{q}_{\mathbf{k}s} \hat{q}_{\mathbf{k}s}^\dagger \right] = \sum_{\mathbf{k}s} \left[\hat{p}_{\mathbf{k}s} \hat{p}_{\mathbf{k}s}^\dagger + \omega_{\mathbf{k}}^2 \hat{q}_{\mathbf{k}s} \hat{q}_{\mathbf{k}s}^\dagger \right],$$

donde al igual que en la sección anterior el símbolo $\sum_{\mathbf{k}s}$ indica que se suma sobre únicamente uno de cada par de vectores $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$.

Más adelante, en el capítulo 3, entraremos a detalle en las consecuencias que tiene la estructura impuesta por la cuantización canónica sobre el sistema y, en particular, sobre el espacio de Hilbert en el que actúan los operadores. Por el momento, sin embargo, nos enfocamos en replicar, del lado cuántico, la separación en partes de frecuencia positiva y negativa que logramos hacer del campo eléctrico de cada modo usando la solución clásica.

Para esto, por supuesto, necesitamos la solución cuántica a la evolución temporal del sistema. Para atacar este problema utilizamos el esquema de Heisenberg, pues nos permite evitar el uso de vectores de estado (es decir, funciones de onda) y preocuparnos sobre exactamente qué pueden ser dichos vectores en otro momento.

Así, postulamos la evolución temporal de todo operador \hat{A} como la ecuación de Heisenberg,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}(t) = [\hat{A}(t), \hat{H}] + i\hbar \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \quad (2.17)$$

Nos interesan particularmente las evoluciones temporales de las coordenadas canónicas, gobernadas por

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \hat{q}_{\mathbf{k}s} &= [\hat{q}_{\mathbf{k}s}, \hat{H}] + 0 = \sum_{\mathbf{k}'s'} \left[\hat{q}_{\mathbf{k}s}, \hat{p}_{\mathbf{k}'s'} \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger + \omega_{\mathbf{k}}^2 \hat{q}_{\mathbf{k}'s'} \hat{q}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger \right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}'s'} \left(\hat{q}_{\mathbf{k}s} \hat{p}_{\mathbf{k}'s'} \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger - \hat{p}_{\mathbf{k}'s'} \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger \hat{q}_{\mathbf{k}s} \right) = \sum_{\mathbf{k}'s'} \hat{p}_{\mathbf{k}'s'} [\hat{q}_{\mathbf{k}s}, \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger] \\ &= i\hbar \hat{p}_{\mathbf{k}s}, \quad y \\ i\hbar \frac{d}{dt} \hat{p}_{\mathbf{k}s} &= [\hat{p}_{\mathbf{k}s}, \hat{H}] + 0 = \sum_{\mathbf{k}'s'} \left[\hat{p}_{\mathbf{k}s}, \hat{p}_{\mathbf{k}'s'} \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger + \omega_{\mathbf{k}}^2 \hat{q}_{\mathbf{k}'s'} \hat{q}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger \right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}'s'} \omega_{\mathbf{k}'}^2 \left(\hat{p}_{\mathbf{k}s} \hat{q}_{\mathbf{k}'s'} \hat{q}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger - \hat{q}_{\mathbf{k}'s'} \hat{q}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger \hat{p}_{\mathbf{k}s} \right) = \sum_{\mathbf{k}'s'} \omega_{\mathbf{k}'}^2 \hat{q}_{\mathbf{k}'s'} [\hat{p}_{\mathbf{k}s}, \hat{q}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger] \\ &= -i\hbar \omega_{\mathbf{k}}^2 \hat{q}_{\mathbf{k}s}. \end{aligned}$$

Este resultado es bien conocido: como operadores, la posición y el momento de un oscilador armónico cuántico cumplen las mismas ecuaciones que en el caso clásico. Entonces, como a las mismas ecuaciones corresponden las mismas soluciones, podemos tomar prestada la solución:

$$\omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}s}(t) = \omega_{\mathbf{k}} \cos(\omega_{\mathbf{k}} t) \hat{q}_{\mathbf{k}s}(0) + \text{sen}(\omega_{\mathbf{k}} t) \hat{p}_{\mathbf{k}s}(0), \quad (2.18a)$$

$$\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t) = -\omega_{\mathbf{k}} \text{sen}(\omega_{\mathbf{k}} t) \hat{q}_{\mathbf{k}s}(0) + \cos(\omega_{\mathbf{k}} t) \hat{p}_{\mathbf{k}s}(0). \quad (2.18b)$$

Con esto, podemos de nuevo separar la solución en partes de frecuencia positiva y negativa:

$$\begin{aligned} \hat{q}_{\mathbf{k}s}(t) &= \cos(\omega_{\mathbf{k}} t) \hat{q}_{\mathbf{k}s}(0) + \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \text{sen}(\omega_{\mathbf{k}} t) \hat{p}_{\mathbf{k}s}(0) \\ &= \frac{1}{2} (e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} + e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}) \hat{q}_{\mathbf{k}s}(0) + \frac{1}{2i\omega_{\mathbf{k}}} (e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} - e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}) \hat{p}_{\mathbf{k}s}(0) \\ &= \frac{\hat{q}_{\mathbf{k}s}(0) + i\hat{p}_{\mathbf{k}s}(0)/\omega_{\mathbf{k}}}{2} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} + \frac{\hat{q}_{\mathbf{k}s}(0) - i\hat{p}_{\mathbf{k}s}(0)/\omega_{\mathbf{k}}}{2} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} = \hat{q}_{\mathbf{k}s}^+(t) + \hat{q}_{\mathbf{k}s}^-(t) \end{aligned}$$

para $\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+(t) = \frac{1}{2} (\hat{q}_{\mathbf{k}s}(0) + i\hat{p}_{\mathbf{k}s}(0)/\omega_{\mathbf{k}}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}$ y $\hat{q}_{\mathbf{k}s}^-(t) = \frac{1}{2} (\hat{q}_{\mathbf{k}s}(0) - i\hat{p}_{\mathbf{k}s}(0)/\omega_{\mathbf{k}}) e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}$, con la posición. Para el momento, análogamente,

$$\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t) = \hat{p}_{\mathbf{k}s}^+(t) + \hat{p}_{\mathbf{k}s}^-(t)$$

con $\hat{p}_{\mathbf{k}s}^+(t) = \frac{1}{2}(\hat{p}_{\mathbf{k}s}(0) - i\omega_{\mathbf{k}}\hat{q}_{\mathbf{k}s}(0))e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}$ y $\hat{p}_{\mathbf{k}s}^-(t) = \frac{1}{2}(\hat{p}_{\mathbf{k}s}(0) + i\omega_{\mathbf{k}}\hat{q}_{\mathbf{k}s}(0))e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}$.

Ahora bien, en estas fórmulas las condiciones iniciales $\hat{q}_{\mathbf{k}s}(0)$ y $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(0)$ pueden reemplazarse con las variables $\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t)$ y $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)$ (lo cual se hace invirtiendo la solución (2.18)) para obtener las expresiones

$$\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+(t) = \frac{1}{2} \left(\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t) + i \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}_{\mathbf{k}s}(t) \right), \quad (2.19a)$$

$$\hat{q}_{\mathbf{k}s}^-(t) = \frac{1}{2} \left(\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t) - i \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}_{\mathbf{k}s}(t) \right), \quad (2.19b)$$

$$\hat{p}_{\mathbf{k}s}^+(t) = \frac{1}{2} \left(\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t) - i\omega_{\mathbf{k}}\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t) \right), \quad (2.19c)$$

$$\hat{p}_{\mathbf{k}s}^-(t) = \frac{1}{2} \left(\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t) + i\omega_{\mathbf{k}}\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t) \right). \quad (2.19d)$$

Estas pueden ahora tomarse como *definiciones* de las partes de frecuencia positiva y negativa de la posición y el momento, y es claro que suman a lo que deben: $\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t) = \hat{q}_{\mathbf{k}s}^+(t) + \hat{q}_{\mathbf{k}s}^-(t)$ y $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t) = \hat{p}_{\mathbf{k}s}^+(t) + \hat{p}_{\mathbf{k}s}^-(t)$. Más aún, se tiene que $\hat{p}_{\mathbf{k}s}^+(t) = -i\omega_{\mathbf{k}}\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+(t)$ y $\hat{p}_{\mathbf{k}s}^-(t) = i\omega_{\mathbf{k}}\hat{q}_{\mathbf{k}s}^-(t)$, lo cual implica que basta con $\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+(t)$ y $\hat{q}_{\mathbf{k}s}^-(t)$, y sus adjuntos, para describir completamente al sistema. Sin embargo, como ni $\hat{q}_{\mathbf{k}s}$ ni $\hat{p}_{\mathbf{k}s}$ son autoadjuntos, *no* se cumple que $(\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^{\dagger} = \hat{q}_{\mathbf{k}s}^-$.

Entonces, como los nuevos operadores $\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+$, $\hat{q}_{\mathbf{k}s}^-$, $(\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^{\dagger}$ y $(\hat{q}_{\mathbf{k}s}^-)^{\dagger}$ son equivalentes a los anteriores, $\hat{q}_{\mathbf{k}s}$, $\hat{p}_{\mathbf{k}s}$, $\hat{q}_{\mathbf{k}s}^{\dagger}$ y $\hat{p}_{\mathbf{k}s}^{\dagger}$, podemos tomarlos como nuestras nuevas variables. Para terminar dicha transformación, falta encontrar los conmutadores entre estas variables, y el hamiltoniano en términos de ellas.

Los conmutadores, dentro de un mismo modo, son

$$\begin{aligned} [\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+, \hat{q}_{\mathbf{k}s}^-] &= \frac{1}{4} \left[\hat{q}_{\mathbf{k}s} + \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}_{\mathbf{k}s}, \hat{q}_{\mathbf{k}s}^{\dagger} - \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}_{\mathbf{k}s}^{\dagger} \right] = 0 \\ [(\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^{\dagger}, (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^-)^{\dagger}] &= \frac{1}{4} \left[\hat{q}_{\mathbf{k}s}^{\dagger} - \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}_{\mathbf{k}s}^{\dagger}, \hat{q}_{\mathbf{k}s}^{\dagger} + \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}_{\mathbf{k}s}^{\dagger} \right] = 0 \\ [\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+, (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^-)^{\dagger}] &= \frac{1}{4} \left[\hat{q}_{\mathbf{k}s} + \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}_{\mathbf{k}s}, \hat{q}_{\mathbf{k}s}^{\dagger} + \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}_{\mathbf{k}s}^{\dagger} \right] = i \frac{[\hat{q}_{\mathbf{k}s}, \hat{p}_{\mathbf{k}s}^{\dagger}] + [\hat{p}_{\mathbf{k}s}, \hat{q}_{\mathbf{k}s}^{\dagger}]}{4\omega_{\mathbf{k}}} = 0 \\ [\hat{q}_{\mathbf{k}s}^-, (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^{\dagger}] &= \frac{1}{4} \left[\hat{q}_{\mathbf{k}s} - \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}_{\mathbf{k}s}, \hat{q}_{\mathbf{k}s}^{\dagger} - \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}_{\mathbf{k}s}^{\dagger} \right] = i \frac{-[\hat{q}_{\mathbf{k}s}, \hat{p}_{\mathbf{k}s}^{\dagger}] - [\hat{p}_{\mathbf{k}s}, \hat{q}_{\mathbf{k}s}^{\dagger}]}{4\omega_{\mathbf{k}}} = 0 \\ [\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+, (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^{\dagger}] &= \frac{1}{4} \left[\hat{q}_{\mathbf{k}s} + \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}_{\mathbf{k}s}, \hat{q}_{\mathbf{k}s}^{\dagger} - \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}_{\mathbf{k}s}^{\dagger} \right] = i \frac{-[\hat{q}_{\mathbf{k}s}, \hat{p}_{\mathbf{k}s}^{\dagger}] + [\hat{p}_{\mathbf{k}s}, \hat{q}_{\mathbf{k}s}^{\dagger}]}{4\omega_{\mathbf{k}}} = \frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}} \\ [\hat{q}_{\mathbf{k}s}^-, (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^-)^{\dagger}] &= \frac{1}{4} \left[\hat{q}_{\mathbf{k}s} - \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}_{\mathbf{k}s}, \hat{q}_{\mathbf{k}s}^{\dagger} + \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}_{\mathbf{k}s}^{\dagger} \right] = i \frac{[\hat{q}_{\mathbf{k}s}, \hat{p}_{\mathbf{k}s}^{\dagger}] - [\hat{p}_{\mathbf{k}s}, \hat{q}_{\mathbf{k}s}^{\dagger}]}{4\omega_{\mathbf{k}}} = -\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}} \end{aligned}$$

y los conmutadores entre modos distintos son todos cero.

El hamiltoniano, en cambio, es

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \sum_{\mathbf{k}s} \left[\hat{p}_{\mathbf{k}s} \hat{p}_{\mathbf{k}s}^\dagger + \omega_{\mathbf{k}}^2 \hat{q}_{\mathbf{k}s} \hat{q}_{\mathbf{k}s}^\dagger \right] \\
&= \sum_{\mathbf{k}s} \left[(-i\omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}s}^+ + i\omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}s}^-) (-i\omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}s}^+ + i\omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}s}^-)^\dagger \right. \\
&\quad \left. + \omega_{\mathbf{k}}^2 (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+ + \hat{q}_{\mathbf{k}s}^-) (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+ + \hat{q}_{\mathbf{k}s}^-)^\dagger \right] \\
&= \sum_{\mathbf{k}s} \omega_{\mathbf{k}}^2 \left[\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+ (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^\dagger - \hat{q}_{\mathbf{k}s}^+ (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^-)^\dagger - \hat{q}_{\mathbf{k}s}^- (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^\dagger + \hat{q}_{\mathbf{k}s}^- (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^-)^\dagger \right. \\
&\quad \left. + \hat{q}_{\mathbf{k}s}^+ (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^\dagger + \hat{q}_{\mathbf{k}s}^+ (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^-)^\dagger + \hat{q}_{\mathbf{k}s}^- (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^\dagger + \hat{q}_{\mathbf{k}s}^- (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^-)^\dagger \right] \\
&= \sum_{\mathbf{k}s} 2\omega_{\mathbf{k}}^2 \left[\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+ (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^\dagger + \hat{q}_{\mathbf{k}s}^- (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^-)^\dagger \right].
\end{aligned}$$

Esto significa que el problema quedó, nuevamente, desacoplado: las variables dinámicas de cada modo normal del campo se separan en dos juegos, $\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+$ junto a $(\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^\dagger$ y $\hat{q}_{\mathbf{k}s}^-$ junto a $(\hat{q}_{\mathbf{k}s}^-)^\dagger$, que actúan independientemente. En particular, los conmutadores sólo son distintos de cero dentro de cada juego, y el hamiltoniano se separa como una suma de productos de las variables de cada juego.

Aquí es importante notar que, si bien la sugerencia de qué variables usar para separar el problema surgió de la solución cuántica a la evolución temporal, la separación del problema en variables independientes recién descrita *no* depende de dicha solución: basta con postular como nuevas variables a $\hat{q}_{\mathbf{k}s}^\pm = \frac{1}{2} \left(\hat{q}_{\mathbf{k}s} \pm i \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}_{\mathbf{k}s} \right)$, y hacer los cálculos correspondientes, para ver que el problema se separa.

Ahora bien, si recordamos que la condición de que los campos de fuerza sean cantidades reales se expresa en la condición $\mathbf{E}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^*$, podemos obtener de ahí la condición equivalente para las coordenadas canónicas: $q_{-\mathbf{k}s} = q_{\mathbf{k}s}^*$ y $p_{-\mathbf{k}s} = p_{\mathbf{k}s}^*$ (sujeta también a la condición $\mathbf{e}_{-\mathbf{k}s} = \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}^*$, que siempre puede asegurarse, y con la cual $\sigma_{-\mathbf{k}s} = -\sigma_{\mathbf{k}s}$). Esto se traduce en que $\hat{q}_{-\mathbf{k}s} = \hat{q}_{\mathbf{k}s}^\dagger$ y $\hat{p}_{-\mathbf{k}s} = \hat{p}_{\mathbf{k}s}^\dagger$, de donde

$$\hat{q}_{-\mathbf{k}s}^+ = \frac{1}{2} \left(\hat{q}_{-\mathbf{k}s} + i \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}_{-\mathbf{k}s} \right) = \frac{1}{2} \left(\hat{q}_{\mathbf{k}s}^\dagger + i \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}_{\mathbf{k}s}^\dagger \right) = \frac{1}{2} \left(\hat{q}_{\mathbf{k}s} - i \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}_{\mathbf{k}s} \right)^\dagger = (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^-)^\dagger.$$

Así, puede recuperarse en el hamiltoniano una suma sobre todos los modos normales, ya que

$$2\omega_{\mathbf{k}}^2 \hat{q}_{\mathbf{k}s}^- (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^-)^\dagger = 2\omega_{\mathbf{k}}^2 (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^\dagger \hat{q}_{\mathbf{k}s}^+ = 2\omega_{\mathbf{k}}^2 \left[\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+ (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^\dagger - \frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}} \right] = 2\omega_{\mathbf{k}}^2 \hat{q}_{\mathbf{k}s}^+ (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^\dagger - \hbar\omega_{\mathbf{k}},$$

con lo cual

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}s} \left[2\omega_{\mathbf{k}}^2 \hat{q}_{\mathbf{k}s}^+ (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^\dagger - \frac{1}{2} \hbar\omega \right],$$

donde se separó el sumando de $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$ en dos mitades, una para el modo $\mathbf{k}s$ y otra para el modo $-\mathbf{k}s$.

Enconces, al igual que en el caso clásico, aparecen dos variables independientes para cada modo normal, pero hay que recordar que el campo eléctrico y magnético de cada modo está íntimamente conectado con el del modo opuesto.

Para cerrar este capítulo separamos, ahora sí, a las variables complejas $\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+$ en sus partes real e imaginaria, para tener operadores autoadjuntos como lo exige la versión normal de la cuantización canónica. Así, proponemos operadores autoadjuntos $\hat{\xi}_{\mathbf{k}s}$ y $\hat{\pi}_{\mathbf{k}s}$ tales que

$$\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+ = A\hat{\xi}_{\mathbf{k}s} + iB\hat{\pi}_{\mathbf{k}s},$$

para A y B constantes reales de normalización que encontraremos a continuación.

Aquí $\hat{\xi}_{\mathbf{k}s}$ y $\hat{\pi}_{\mathbf{k}s}$ pueden despejarse para obtener

$$\begin{cases} \hat{\xi}_{\mathbf{k}s} = \frac{1}{2A} \left(\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+ + (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^{\dagger} \right) \\ \hat{\pi}_{\mathbf{k}s} = \frac{1}{2Bi} \left(\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+ - (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^{\dagger} \right), \end{cases}$$

con lo que puede calcularse su conmutador:

$$\begin{aligned} [\hat{\xi}_{\mathbf{k}s}, \hat{\pi}_{\mathbf{k}s}] &= \frac{\left[\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+ + (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^{\dagger}, \hat{q}_{\mathbf{k}s}^+ - (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^{\dagger} \right]}{4ABi} = \frac{\left[\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+, (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^{\dagger} \right] - \left[(\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^{\dagger}, \hat{q}_{\mathbf{k}s}^+ \right]}{4ABi} \\ &= \frac{i\hbar}{4AB\omega_{\mathbf{k}}}. \end{aligned}$$

Igualmente, el sumando correspondiente al modo $\mathbf{k}s$ en el hamiltoniano se transforma en

$$\begin{aligned} 2\omega_{\mathbf{k}}^2 \hat{q}_{\mathbf{k}s}^+ (\hat{q}_{\mathbf{k}s}^+)^{\dagger} &= 2\omega_{\mathbf{k}}^2 \left(A\hat{\xi}_{\mathbf{k}s} + iB\hat{\pi}_{\mathbf{k}s} \right) \left(A\hat{\xi}_{\mathbf{k}s} - iB\hat{\pi}_{\mathbf{k}s} \right) \\ &= 2\omega_{\mathbf{k}}^2 \left(A^2\hat{\xi}_{\mathbf{k}s}^2 - iAB\hat{\xi}_{\mathbf{k}s}\hat{\pi}_{\mathbf{k}s} + iAB\hat{\pi}_{\mathbf{k}s}\hat{\xi}_{\mathbf{k}s} + B^2\hat{\pi}_{\mathbf{k}s}^2 \right) \\ &= 2\omega_{\mathbf{k}}^2 \left(A^2\hat{\xi}_{\mathbf{k}s}^2 + B^2\hat{\pi}_{\mathbf{k}s}^2 - iAB\frac{i\hbar}{4AB\omega_{\mathbf{k}}} \right) \\ &= 2\omega_{\mathbf{k}}^2 \left(A^2\hat{\xi}_{\mathbf{k}s}^2 + B^2\hat{\pi}_{\mathbf{k}s}^2 \right) + \frac{1}{2}\hbar\omega_{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Entonces es natural tomar $A = B$, y tomando $A^2 = \hbar/4\omega_{\mathbf{k}}$ se tiene por un lado el conmutador

$$[\hat{\xi}_{\mathbf{k}s}, \hat{\pi}_{\mathbf{k}s}] = i1$$

dentro de cada modo, con los demás conmutadores entre las $\hat{\xi}_{\mathbf{k}s}$ y $\hat{\pi}_{\mathbf{k}s}$ iguales a cero, y por otro el hamiltoniano total

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}s} \frac{1}{2} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{\xi}_{\mathbf{k}s}^2 + \hat{\pi}_{\mathbf{k}s}^2 \right). \quad (2.20)$$

Así, el campo electromagnético en la caja que consideramos queda descrito por una colección de osciladores armónicos cuánticos, uno para cada modo. Sin embargo, hay que tomar en cuenta que los modos no son estrictamente independientes, en el sentido de que si se quiere calcular el campo eléctrico o magnético de algún modo hay que considerar no sólo el estado de ese modo sino también del modo con vector de onda opuesto.

Así, el campo eléctrico se convierte en un operador vectorial, que además depende de la posición:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{k}_s} \hat{E}_{\mathbf{k}_s} \mathbf{e}_{\mathbf{k}_s} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{k}_s} \frac{i\sigma_{\mathbf{k}_s}}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \hat{p}_{\mathbf{k}_s'} \mathbf{e}_{\mathbf{k}_s} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\
&= \sum_{\mathbf{k}_s} \frac{\sigma_{\mathbf{k}_s'} \omega_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}_s'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (\hat{q}_{\mathbf{k}_s}^+ - \hat{q}_{\mathbf{k}_s}^-) \quad (\text{cambiando } s \text{ por } s') \\
&= \sum_{\mathbf{k}_s} \frac{\sigma_{\mathbf{k}_s'} \omega_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}_s'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{q}_{\mathbf{k}_s}^+ - \sum_{\mathbf{k}_s} \frac{\sigma_{\mathbf{k}_s'} \omega_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}_s'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{q}_{\mathbf{k}_s}^- \\
&= \sum_{\mathbf{k}_s} \frac{\sigma_{\mathbf{k}_s'} \omega_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}_s'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{q}_{\mathbf{k}_s}^+ - \sum_{\mathbf{k}_s} \frac{\sigma_{\mathbf{k}_s'} \omega_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}_s'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (\hat{q}_{-\mathbf{k}_s}^+)^{\dagger} \\
&= \sum_{\mathbf{k}_s} \frac{\sigma_{\mathbf{k}_s'} \omega_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}_s'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{q}_{\mathbf{k}_s}^+ - \sum_{\mathbf{k}_s} \frac{\sigma_{-\mathbf{k}_s'} \omega_{-\mathbf{k}}}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \mathbf{e}_{-\mathbf{k}_s'} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (\hat{q}_{\mathbf{k}_s}^+)^{\dagger} \\
&= \sum_{\mathbf{k}_s} \frac{\sigma_{\mathbf{k}_s'} \omega_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \left[\mathbf{e}_{\mathbf{k}_s'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{q}_{\mathbf{k}_s}^+ + \mathbf{e}_{\mathbf{k}_s'}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (\hat{q}_{\mathbf{k}_s}^+)^{\dagger} \right]
\end{aligned}$$

Esto puede ponerse en términos del operador de aniquilación, definido por $\hat{a}_{\mathbf{k}_s} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\xi}_{\mathbf{k}_s} + i\hat{\pi}_{\mathbf{k}_s}) = \sqrt{\frac{2\omega_{\mathbf{k}}}{\hbar}} \hat{q}_{\mathbf{k}_s}^+$, y que será estudiado a detalle en el siguiente capítulo, de manera que

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}_s} \sigma_{\mathbf{k}_s'} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}} \left[\mathbf{e}_{\mathbf{k}_s'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}_s} + \mathbf{e}_{\mathbf{k}_s'}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}_s}^{\dagger} \right]. \quad (2.21)$$

Este operador es claramente autoadjunto, y coincide (salvo por constantes triviales) con la forma estándar dada en libros de texto [21, 50].

Capítulo 3

Versión estándar de la cuantización

El propósito de este capítulo es explorar más a detalle la descripción cuántica del campo electromagnético. Ésta consiste en un conjunto de modos normales, a cada uno de los cuales se le asigna un *espacio de estados* (espacio de Hilbert) separable, con un hamiltoniano de oscilador armónico. La selección de modos relevantes depende del problema físico en consideración: puede ser un número finito, infinito, o incluso un continuo de modos. Sin embargo, por el momento consideramos un único modo normal, que es el elemento básico del análisis y puede ser extendido a casos más complejos.

Esta versión estándar se obtiene por el procedimiento de cuantización canónica, del oscilador armónico, y sus elementos básicos son operadores autoadjuntos de posición y momento, $\hat{\xi}$ y $\hat{\pi}$, en un cierto espacio de Hilbert \mathcal{H} , tales que

$$[\hat{\xi}, \hat{\pi}] = \hat{\xi}\hat{\pi} - \hat{\pi}\hat{\xi} = i1. \quad (3.1)$$

Además se identifica al hamiltoniano del sistema con el operador

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega(\hat{\pi}^2 + \hat{\xi}^2), \quad (3.2)$$

dado por (2.20) cuando se restringe el campo a tener un único modo normal excitado.

3.1. Estructura del espacio estado

El primer requisito es particularmente fuerte, ya que fija la estructura del espacio de Hilbert \mathcal{H} .¹ Para ver esto, debe notarse que el conmutador (3.1) implica a los conmutadores

$$[\hat{\xi}, \hat{\pi}^2] = \hat{\xi}\hat{\pi}^2 - \hat{\pi}^2\hat{\xi} = (\hat{\xi}\hat{\pi} - \hat{\pi}\hat{\xi})\hat{\pi} + \hat{\pi}(\hat{\xi}\hat{\pi} - \hat{\pi}\hat{\xi}) = 2i\hat{\pi},$$

¹Este resultado se debe a von Neumann [57]. Algunos libros de texto [8, 15, 35, 36] dan tratamientos análogos o alternativos a este, sin tratar el caso en el que $\hat{\xi}$ es degenerado.

$$\begin{aligned}
[\hat{\xi}, \hat{\pi}^3] &= \hat{\xi}\hat{\pi}^3 - \hat{\pi}^3\hat{\xi} = (\hat{\xi}\hat{\pi}^2 - \hat{\pi}^2\hat{\xi})\hat{\pi} + \hat{\pi}^2(\hat{\xi}\hat{\pi} - \hat{\pi}\hat{\xi}) = 3i\hat{\pi}^2, \\
[\hat{\xi}, \hat{\pi}^4] &= \hat{\xi}\hat{\pi}^4 - \hat{\pi}^4\hat{\xi} = (\hat{\xi}\hat{\pi}^3 - \hat{\pi}^3\hat{\xi})\hat{\pi} + \hat{\pi}^3(\hat{\xi}\hat{\pi} - \hat{\pi}\hat{\xi}) = 4i\hat{\pi}^3, \text{ y por inducción} \\
[\hat{\xi}, \hat{\pi}^j] &= \hat{\xi}\hat{\pi}^j - \hat{\pi}^j\hat{\xi} = (\hat{\xi}\hat{\pi}^{j-1} - \hat{\pi}^{j-1}\hat{\xi})\hat{\pi} + \hat{\pi}^{j-1}(\hat{\xi}\hat{\pi} - \hat{\pi}\hat{\xi}) = ji\hat{\pi}^{j-1} \quad \forall j \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

y con ellos se obtiene

$$\begin{aligned}
[\hat{\xi}, e^{i\xi\hat{\pi}}] &= \left[\hat{\xi}, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\xi\hat{\pi})^j}{j!} \right] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^j}{j!} [\hat{\xi}, \hat{\pi}^j] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^j}{j!} ji\hat{\pi}^{j-1} = -\xi \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(i\xi\hat{\pi})^{j-1}}{(j-1)!} \\
&= -\xi e^{i\xi\hat{\pi}}.
\end{aligned}$$

Entonces, si se tiene un vector propio $|\xi\rangle$ de $\hat{\xi}$, de modo que $\hat{\xi}|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle$, la identidad

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}e^{-i\Delta\xi\hat{\pi}}|\xi\rangle &= (e^{-i\Delta\xi\hat{\pi}}\hat{\xi} + \Delta\xi e^{-i\Delta\xi\hat{\pi}})|\xi\rangle = e^{-i\Delta\xi\hat{\pi}}\hat{\xi}|\xi\rangle + \Delta\xi e^{-i\Delta\xi\hat{\pi}}|\xi\rangle \\
&= e^{-i\Delta\xi\hat{\pi}}\xi|\xi\rangle + \Delta\xi e^{-i\Delta\xi\hat{\pi}}|\xi\rangle = (\xi + \Delta\xi)e^{-i\Delta\xi\hat{\pi}}|\xi\rangle
\end{aligned}$$

implica que $e^{-i\Delta\xi\hat{\pi}}|\xi\rangle$ es otro vector propio de $\hat{\xi}$, ahora con valor propio $(\xi + \Delta\xi)$. Como $\Delta\xi$ es arbitrario, ello quiere decir que cada número real² es un valor propio de $\hat{\xi}$.

Ahora bien, cabe la posibilidad de que algún valor propio ξ de $\hat{\xi}$ sea degenerado. (Más aún, si un valor propio es degenerado, lo son todos, ya que si $|\xi_0, 1\rangle$ y $|\xi_0, 2\rangle$ son dos vectores propios ortogonales de $\hat{\xi}$ con valor propio ξ_0 , entonces los vectores propios $|\xi, j\rangle = e^{-i(\xi-\xi_0)\hat{\pi}}|\xi_0, j\rangle$ ($j = 1, 2$) obtenidos mediante el procedimiento anterior son de nuevo ortogonales ya que $\langle \xi, 1 | \xi, 2 \rangle = \langle \xi_0, 1 | e^{+i(\xi-\xi_0)\hat{\pi}} e^{-i(\xi-\xi_0)\hat{\pi}} | \xi_0, 2 \rangle = \langle \xi_0, 1 | \xi_0, 2 \rangle = 0$, y por ello son independientes.)

Esta degeneración es de esperarse: el ejemplo más sencillo es el de una partícula en dos dimensiones, descrita por operadores $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\pi}_\xi, \hat{\pi}_\eta$ tales que $[\hat{\xi}, \hat{\pi}_\xi] = [\hat{\eta}, \hat{\pi}_\eta] = i1$ y los demás conmutadores son cero. En este caso, cada valor propio de $\hat{\xi}$ tiene una infinidad de vectores propios, uno por cada valor propio de $\hat{\eta}$. Sin embargo, eso da la impresión de que la degeneración es en cierta medida “trivial”, lo cual es cierto en general y puede hacerse preciso, de la siguiente manera.

La idea general es separar al espacio de hilbert \mathcal{H} como una suma directa de espacios “unidimensionales”, en los que el operador de posición $\hat{\xi}$ no es degenerado. Esto puede hacerse de manera trivial escogiendo un valor propio ξ_0 y una base $\{|\xi_0, k\rangle : k \in I\}$ del espacio propio $E(\xi) = \{|\psi\rangle \in \mathcal{H} : \hat{\xi}|\psi\rangle = \xi|\psi\rangle\}$, misma que genera una base $\{|\xi, k\rangle := e^{-i(\xi-\xi_0)\hat{\pi}}|\xi_0, k\rangle : \xi \in \mathbb{R}, k \in I\}$ para \mathcal{H} . Los conjuntos generados $\mathcal{H}_k = \langle \{|\xi, k\rangle := e^{-i(\xi-\xi_0)\hat{\pi}}|\xi_0, k\rangle : \xi \in \mathbb{R} \rangle$, para k fija, descomponen a $\mathcal{H} = \bigoplus_k \mathcal{H}_k$ como la suma directa deseada.

Sin embargo, queda por determinar la acción del operador de momento $\hat{\pi}$. Normalmente se le asocia la acción $\hat{\pi} = -i\frac{\partial}{\partial \xi}$, misma que respeta la separación de \mathcal{H} en la

²Se requiere que el valor propio ξ sea un número real para que $\hat{\xi}$ sea un operador autoadjunto. El argumento anterior no funciona si $\Delta\xi$ tiene parte imaginaria pues en ese caso la exponencial $e^{-i\Delta\xi\hat{\pi}}$ no puede definirse, ya que $\hat{\pi}$, al igual que $\hat{\xi}$, no es un operador acotado.

suma directa: se tiene $\hat{\pi}(\mathcal{H}_k) \subseteq \mathcal{H}_k$ (para una partícula en un plano, por ejemplo, \mathcal{H}_k se escoge de vectores propios de $\hat{\eta}$ correspondientes a un mismo valor propio η , lo cual no cambia bajo la acción de $-i\frac{\partial}{\partial \xi}$), pero no hay garantía de que esto ocurra con la separación en suma directa descrita arriba.

Para lograr esto, hay que asegurar que $\hat{\pi}|\xi_0, k\rangle$ no contenga contribuciones de kets $|\xi_0, k'\rangle$ con $k' \neq k$ (aunque tendrá, ciertamente, contribuciones de $|\xi, k\rangle$ con $\xi \neq \xi_0$. Es decir, en algún sentido hay que diagonalizar $\hat{\pi}$ en el espacio propio $E(\xi_0)$, sin importar lo que ocurra afuera de él. Es decir, se toma la restricción de $\hat{\pi}$ a $E(\xi_0)$, lo cual da en general vectores de \mathcal{H} , y de ellos se toma la componente a lo largo de $E(\xi_0)$, es decir, se proyectan ortogonalmente sobre $E(\xi_0)$.

Esto mismo se logra considerando el operador $\hat{P}_{\xi_0}\hat{\pi}\hat{P}_{\xi_0}$ (donde \hat{P}_{ξ_0} es la proyección ortogonal sobre $E(\xi_0)$), que tiene la acción descrita arriba para vectores en $E(\xi_0)$ y regresa cero para vectores en su complemento ortogonal. Este operador es autoadjunto, ya que \hat{P}_{ξ_0} lo es, y conmuta con $\hat{\xi}$:

- para $|\xi\rangle$ vector propio de $\hat{\xi}$ con valor propio $\xi \neq \xi_0$ se tiene

$$\left(\hat{P}_{\xi_0}\hat{\pi}\hat{P}_{\xi_0}\right)\hat{\xi}|\xi\rangle = \left(\hat{P}_{\xi_0}\hat{\pi}\hat{P}_{\xi_0}\right)\xi|\xi\rangle = 0 = \hat{\xi}\left(\hat{P}_{\xi_0}\hat{\pi}\hat{P}_{\xi_0}\right)|\xi\rangle,$$

ya que $\hat{P}_{\xi_0}|\xi\rangle = 0$, mientras que

- para $|\xi_0\rangle$ vector propio de $\hat{\xi}$ con valor propio ξ_0 , como $\left(\hat{P}_{\xi_0}\hat{\pi}\hat{P}_{\xi_0}\right)|\xi_0\rangle$ está en $E(\xi_0)$, se tiene

$$\hat{\xi}\left(\hat{P}_{\xi_0}\hat{\pi}\hat{P}_{\xi_0}\right)|\xi_0\rangle = \xi_0\left(\hat{P}_{\xi_0}\hat{\pi}\hat{P}_{\xi_0}\right)|\xi_0\rangle = \left(\hat{P}_{\xi_0}\hat{\pi}\hat{P}_{\xi_0}\right)\xi_0|\xi_0\rangle = \left(\hat{P}_{\xi_0}\hat{\pi}\hat{P}_{\xi_0}\right)\hat{\xi}|\xi_0\rangle.$$

Así, $\hat{\xi}$ y $\hat{P}_{\xi_0}\hat{\pi}\hat{P}_{\xi_0}$ son operadores autoadjuntos y conmutan, de modo que pueden ser diagonalizados simultáneamente. Esto significa que la base $\{|\xi_0, k\rangle : k \in I\}$ para $E(\xi_0)$ puede tomarse de vectores propios de $\hat{P}_{\xi_0}\hat{\pi}\hat{P}_{\xi_0}$, lo cual da finalmente el elemento de matriz crucial:

$$\langle \xi_0, k' | \hat{\pi} | \xi_0, k \rangle = 0 \text{ cuando } k' \neq k. \quad (3.3)$$

Habiendo asegurado esto, puede verse que $\hat{\pi}(\mathcal{H}_k) \subseteq \mathcal{H}_k$. Es decir, si se tiene $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_k$, puede expresarse

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \psi(\xi) |\xi, k\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \psi(\xi) e^{-i(\xi-\xi_0)\hat{\pi}} |\xi_0, k\rangle,$$

con lo cual para cada $\xi' \in \mathbb{R}$ y $k' \neq k$

$$\begin{aligned} \langle \xi', k' | \hat{\pi} | \psi \rangle &= \langle \xi', k' | \hat{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \psi(\xi) e^{-i(\xi-\xi_0)\hat{\pi}} |\xi_0, k\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \psi(\xi) e^{-i(\xi-\xi_0)\hat{\pi}} \langle \xi', k' | \hat{\pi} | \xi_0, k\rangle = 0, \end{aligned}$$

lo cual completa la demostración.

Es debido a lo anterior que puede suponerse que los valores propios de $\hat{\xi}$ no son degenerados. Esto se debe a que \mathcal{H} puede separarse en una suma directa $\mathcal{H} = \bigoplus_k \mathcal{H}_k$ donde cada \mathcal{H}_k es invariante bajo la acción tanto de $\hat{\xi}$ como de $\hat{\pi}$, de modo que el conmutador (3.1) $[\hat{\xi}, \hat{\pi}] = i1$ vale dentro de \mathcal{H}_k . Entonces puede uno restringirse a \mathcal{H}_k , donde $\hat{\xi}$ es no-degenerado, como la estructura matemática más sencilla compatible con los requisitos de la cuantización canónica.

Así, de ahora en adelante suponemos que $\hat{\xi}$ es no-degenerado, de modo que \mathcal{H} tiene una base de vectores propios de $\hat{\xi}$, $\{|\xi\rangle : \xi \in \mathbb{R}\}$, con $\hat{\xi}|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle$, relacionados entre sí mediante $|\xi\rangle = e^{-i(\xi-\xi_0)\hat{\pi}}|\xi_0\rangle$.

3.2. El operador de momento

Para completar el análisis anterior de la acción de $\hat{\pi}$, cuyo enfoque era obtener información sobre $\hat{\xi}$, demostramos ahora que el conmutador (3.1) fija completamente la acción de $\hat{\pi}$, en particular con respecto a la base de vectores propios de $\hat{\xi}$.

Un vector arbitrario $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ puede entonces expresarse como

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \psi(\xi) |\xi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \psi(\xi) e^{-i(\xi-\xi_0)\hat{\pi}} |\xi_0\rangle \quad (3.4)$$

para alguna función $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ relativamente bien portada (en general, cuadrado-integrable y continuamente diferenciable). Más aún, escogiendo a las $\{|\xi\rangle\}$ ortonormales, de modo que $\langle\xi'|\xi\rangle = \delta(\xi' - \xi)$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle\xi|\psi\rangle &= \langle\xi| \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \psi(\xi') |\xi'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \psi(\xi') \langle\xi|\xi'\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \psi(\xi') \delta(\xi' - \xi) = \psi(\xi), \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} e^{-i\Delta\xi\hat{\pi}}|\psi\rangle &= e^{-i\Delta\xi\hat{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \psi(\xi) e^{-i(\xi-\xi_0)\hat{\pi}} |\xi_0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \psi(\xi) e^{-i\Delta\xi\hat{\pi}} e^{-i(\xi-\xi_0)\hat{\pi}} |\xi_0\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \psi(\xi) e^{-i(\Delta\xi+\xi-\xi_0)\hat{\pi}} |\xi_0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \psi(\xi' - \Delta\xi) e^{-i(\xi'-\xi_0)\hat{\pi}} |\xi_0\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \psi(\xi - \Delta\xi) |\xi\rangle. \end{aligned}$$

Armados con esta herramienta, podemos ahora calcular $\hat{\pi}|\psi\rangle$, notando que, para $\Delta\xi$ pequeño

$$\psi(\xi + \Delta\xi) = \langle\xi| \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \psi(\xi' + \Delta\xi) |\xi'\rangle = \langle\xi| e^{+i\Delta\xi\hat{\pi}} |\psi\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \xi | (1 + i\Delta\xi\hat{\pi} + O(\Delta\xi^2)) | \psi \rangle = \psi(\xi) + i\Delta\xi \langle \xi | \hat{\pi} | \psi \rangle + O(\Delta\xi^2) \\
\Rightarrow i \langle \xi | \hat{\pi} | \psi \rangle &\equiv \frac{\psi(\xi + \Delta\xi) - \psi(\xi)}{\Delta\xi} + O(\Delta\xi), \text{ por lo cual} \\
i \langle \xi | \hat{\pi} | \psi \rangle &= \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{\psi(\xi + \Delta\xi) - \psi(\xi)}{\Delta\xi} = \psi'(\xi).
\end{aligned}$$

Utilizamos ahora la relación de cerradura para los kets $|\xi\rangle$, $\int_{-\infty}^{\infty} d\xi |\xi\rangle \langle \xi| = 1$, (válida cuando los valores propios son no degenerados) para calcular

$$\hat{\pi} |\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi |\xi\rangle \langle \xi | \hat{\pi} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{1}{i} \frac{d\psi}{d\xi}(\xi) |\xi\rangle.$$

3.3. El operador de número

Consideramos ahora dos herramientas particularmente valiosas para el estudio de sistemas cuánticos en una dimensión y, en particular, del hamiltoniano de oscilador armónico: el *operador de aniquilación* $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\xi} + i\hat{\pi})$ y su adjunto, el *operador de creación*, $\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\xi} - i\hat{\pi})$. Se define, además, el *operador de número* como $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$. Las motivaciones para estos nombres quedarán claras en los próximos párrafos.

Como combinaciones lineales de los operadores de posición y momento, los operadores de creación y aniquilación son básicamente equivalentes. Así, pueden recuperarse $\hat{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ y $\hat{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$, mientras que el conmutador (3.1) es equivalente al conmutador entre \hat{a} y \hat{a}^\dagger ,

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \frac{1}{2}[\hat{\xi} + i\hat{\pi}, \hat{\xi} - i\hat{\pi}] = -i\frac{1}{2}[\hat{\xi}, \hat{\pi}] + i\frac{1}{2}[\hat{\pi}, \hat{\xi}] = -i[\hat{\xi}, \hat{\pi}] = 1. \quad (3.5)$$

El hamiltoniano, como función de $\hat{\xi}$ y $\hat{\pi}$, puede también ser expresado en términos de \hat{a} y \hat{a}^\dagger . Para un oscilador armónico dicha expresión es particularmente simple:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2}\hbar\omega(\hat{\pi}^2 + \hat{\xi}^2) = \frac{1}{4}\hbar\omega(-(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 + (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2) \\
&= \frac{1}{4}\hbar\omega(-\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \frac{1}{2}\hbar\omega(2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) \\
&= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right). \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Así, el problema de encontrar el espectro de energías de un oscilador armónico es equivalente a encontrar el del operador de número. La solución de este problema es bien conocida, pero no sobra aquí.

Como $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ es un operador claramente autoadjunto, puede esperarse que tenga un número infinito de vectores y valores propios. Sea $|\nu\rangle$ uno de ellos, de modo que $\hat{n}|\nu\rangle = \nu|\nu\rangle$. El truco está en considerar la acción de \hat{a} y \hat{a}^\dagger sobre $|\nu\rangle$. En particular,

$$\begin{aligned}\hat{n}(\hat{a}|\nu\rangle) &= \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}|\nu\rangle = (\hat{a} \hat{a}^\dagger - 1)\hat{a}|\nu\rangle = \hat{a}(\hat{a}^\dagger \hat{a} - 1)|\nu\rangle = \hat{a}(\hat{n} - 1)|\nu\rangle = \hat{a}(\nu - 1)|\nu\rangle \\ &= (\nu - 1)\hat{a}|\nu\rangle, \quad \text{y} \\ \hat{n}(\hat{a}^\dagger|\nu\rangle) &= \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger|\nu\rangle = \hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1)|\nu\rangle = \hat{a}^\dagger(\hat{n} + 1)|\nu\rangle = \hat{a}^\dagger(\nu + 1)|\nu\rangle \\ &= (\nu + 1)\hat{a}^\dagger|\nu\rangle.\end{aligned}$$

Es decir, para cada vector propio $|\nu\rangle$ de \hat{n} con valor propio ν se pueden obtener vectores propios $\hat{a}|\nu\rangle$ y $\hat{a}^\dagger|\nu\rangle$ de \hat{n} , con valores propios $\nu - 1$ y $\nu + 1$, respectivamente – con la salvedad de que los vectores no se anulen. En particular, $\hat{a}|\nu\rangle$ debe anularse para algunos vectores, pues de lo contrario se tendría una sucesión de vectores propios $\hat{a}^j|\nu\rangle$ cuyos valores propios, $\nu - j$, en algún momento llegan a ser negativos – lo cual no puede ocurrir ya que \hat{n} es semidefinido positivo. Es decir, para cada vector propio $|\nu\rangle$ de \hat{n} se tiene $\nu\langle\nu|\nu\rangle = \langle\nu|\hat{n}|\nu\rangle = \langle\nu|\hat{a}^\dagger \hat{a}|\nu\rangle = \|\hat{a}|\nu\rangle\|^2 \geq 0$, y como $\langle\nu|\nu\rangle > 0$, debe tenerse $\nu \geq 0$.

Lo anterior implica que debe haber por lo menos una $\nu \in [0, 1)$ tal que $\hat{a}|\nu\rangle = 0$, y abre la pregunta de cuáles son las ν que cumplen eso, y cuántos y cuáles vectores propios les corresponden. La primera pregunta es fácil: $\nu|\nu\rangle = \hat{n}|\nu\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a}|\nu\rangle = \hat{a}^\dagger 0 = 0$ y $|\nu\rangle \neq 0$ implican que $\nu = 0$. Para la segunda, en cambio, la estructura en detalle del espacio de Hilbert \mathcal{H} es crucial. La ecuación a resolver es

$$\hat{a}|\nu\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\xi} + i\hat{\pi})|\nu\rangle = 0,$$

y para resolverla hay que llevarla a la representación de posición.³

Así, se escribe $|\nu\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \nu(\xi) |\xi\rangle$ con $\langle\xi|\nu\rangle = \nu(\xi)$, con lo cual

$$\begin{aligned}0 &= \sqrt{2}\langle\xi|\hat{a}|\nu\rangle = \langle\xi|\hat{\xi} + i\hat{\pi}|\nu\rangle = \langle\xi|\hat{\xi}|\nu\rangle + i\langle\xi|\hat{\pi}|\nu\rangle \\ &= \langle\xi|\hat{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \nu(\xi') |\xi'\rangle + i\langle\xi| \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \frac{1}{i} \frac{d\nu}{d\xi}(\xi') |\xi'\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \nu(\xi') \langle\xi|\hat{\xi}|\xi'\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \frac{d\nu}{d\xi}(\xi') \langle\xi|\xi'\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \nu(\xi') \xi' \delta(\xi - \xi') + \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \frac{d\nu}{d\xi}(\xi') \delta(\xi' - \xi) \\ &\Rightarrow \xi\nu(\xi) + \frac{d\nu}{d\xi}(\xi) = 0\end{aligned}\tag{3.7}$$

³De hecho, lo mismo puede hacerse en la representación de momento, dando un análisis no sólo equivalente, sino básicamente idéntico. Esto se debe a la simetría, salvo por factores de i , entre $\hat{\xi}$ y $\hat{\pi}$ en el conmutador $[\hat{\xi}, \hat{\pi}] = i1$, que define la estructura del espacio, y la ecuación $(\hat{\xi} + i\hat{\pi})|\nu\rangle = 0$ a resolver.

Esta ecuación diferencial, de primer orden, se resuelve fácilmente mediante separación de variables, para dar la solución

$$\nu(\xi) = Ae^{-\frac{1}{2}\xi^2},$$

donde $A \in \mathbb{C}$ es una constante arbitraria, que se fija al valor $A = \pi^{-1/4}$ pidiendo que sea real y positiva, y que $|\nu\rangle$ esté normalizado a $\langle\nu|\nu\rangle=1$.

De este resultado puede obtenerse la estructura completa del espectro y la degeneración de \hat{n} . Demostramos que existe una única solución a la ecuación $\hat{a}|\psi\rangle = 0$, y que dicha solución es además vector propio de \hat{n} con valor propio 0; ese estado se conoce como el *vacío* y se denota $|0\rangle$. Es, además, el único vector propio de \hat{n} con valor propio 0, ya que si $\hat{n}|\psi\rangle = 0$ entonces $0 = \langle\psi|\hat{n}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi\rangle = \|\hat{a}|\psi\rangle\|^2$, y por ello $\hat{a}|\psi\rangle = 0$.

Del vacío se obtienen mediante el operador de creación vectores propios $\hat{a}^{\dagger n}|0\rangle$ con valor propio n para cada número natural n , que son los *únicos* vectores propios de \hat{n} . Debido a la acción de “escalera” del operador de aniquilación, hemos demostrado que esos son los únicos valores propios.

Además, si $|\phi\rangle$ y $|\psi\rangle$ son vectores propios con valor propio 1, $\hat{a}|\phi\rangle$ y $\hat{a}|\psi\rangle$ son vectores propios con valor propio 0, de modo que son proporcionales (y, sin perder generalidad, iguales). Ello implica que $\hat{a}(|\psi\rangle - |\phi\rangle) = 0$ y por ello $|\phi\rangle - |\psi\rangle = B|0\rangle$ para alguna constante B que debe anularse pues $|0\rangle$ debe ser ortogonal tanto a $|\psi\rangle$ como a $|\phi\rangle$; por ello, $|\phi\rangle = |\psi\rangle$ y 1 es un valor propio no degenerado. Este argumento puede extenderse, por inducción, para ver que cada valor propio $n \in \mathbb{N}$ de \hat{n} es no-degenerado.

Aquí es importante notar que esta conclusión de no-degeneración se basa en una hipótesis anterior de no-degeneración, sobre el espectro de $\hat{\xi}$, la cual permite aplicar la ecuación (3.4) al estado $|\nu\rangle$. Si $\hat{\xi}$ no es degenerado, entonces este análisis de \hat{n} vale dentro de cada miembro \mathcal{H}_k de la suma directa $\mathcal{H} = \bigoplus_k \mathcal{H}_k$, donde \hat{n} no es degenerado. Esto implica que, en general, \hat{n} puede ser degenerado – en la misma medida que $\hat{\xi}$ y con la misma degeneración en cada valor propio – pero que al igual que con $\hat{\xi}$ dicha degeneración puede ser ignorada restringiéndose a uno de los espacios \mathcal{H}_k .

Para finalizar el análisis, hay que fijar la normalización y la fase de la base $\{|n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ de vectores propios de \hat{n} . Demostramos ya que si $|n\rangle$ es vector propio con $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$, entonces $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ es vector propio con $\hat{n}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger|n\rangle$. Como no hay degeneración, debe ser un múltiplo de $|n+1\rangle$, es decir, $\hat{a}^\dagger|n\rangle = c_n|n+1\rangle$. Al pedir que todos los vectores propios queden normalizados a 1 se obtiene

$$\begin{aligned} |c_n|^2 &= \langle n+1|c_n^*c_n|n+1\rangle = \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1|n\rangle = \langle n|\hat{n} + 1|n\rangle \\ &= (n+1)\langle n|n\rangle = n+1, \end{aligned}$$

que implica $|c_n| = \sqrt{n+1}$. Fijando la fase de la base de modo que c_n sea real y positivo, se tiene $c_n = \sqrt{n+1}$. Por ello,

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (3.8)$$

Para encontrar la acción de \hat{a} sobre la base $\{|n\rangle\}$ podría repetirse un argumento idéntico, pero la fase de la base ya no puede cambiarse. En cambio, hay que multiplicar (3.8) por \hat{a} para obtener $\sqrt{n+1}\hat{a}|n+1\rangle = \hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (\hat{a}^\dagger\hat{a}+1)|n\rangle = (\hat{n}+1)|n\rangle = (n+1)|n\rangle$, de donde $\hat{a}|n+1\rangle = \sqrt{n+1}|n\rangle$ y finalmente

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (3.9)$$

válida incluso para $n=0$ en el entendido de que $0|-1\rangle = 0$ aunque no hay ningún vector $|-1\rangle$.

Se obtiene, además, una expresión explícita para la base,

$$|n\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle, \quad (3.10)$$

que se conoce como la *base de número*.

3.4. Operadores de creación y aniquilación

3.4.1. Vectores propios

Consideramos ahora la estructura analítica de los operadores de creación y aniquilación. Como no son operadores autoadjuntos, no puede asegurarse que \hat{a} ni \hat{a}^\dagger tengan bases ortonormales de vectores propios; más aún, al no ser *normales* (es decir, al no conmutar con sus adjuntos) no pueden existir dichas bases. Sin embargo, en principio todavía pueden tener uno o más vectores propios e incluso – al no ser autoadjuntos – valores propios complejos.

Empezamos por el operador de creación, por ser el caso más sencillo y por responder a una pregunta que todavía está abierta. Si se busca un vector propio de \hat{a}^\dagger con valor propio α , se plantea la ecuación $\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\xi} - i\hat{\pi})|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, que puede llevarse mediante el mismo proceso que dio la ecuación (3.7) a la ecuación

$$\xi\psi(\xi) - \frac{d\psi}{d\xi}(\xi) = \sqrt{2}\alpha\psi(\xi),$$

que se reduce a $\frac{d\psi}{d\xi}(\xi) = (\xi - \sqrt{2}\alpha)\psi(\xi)$, con lo cual $\psi(\xi) = Ae^{+\frac{1}{2}(\xi - \sqrt{2}\alpha)^2}$. Esta función de onda *no* representa un estado físico, ya que su módulo, $|\psi(\xi)|^2 = |A|^2 e^{\frac{1}{2}2\text{Re}((\xi - \sqrt{2}\alpha)^2)} = |A|^2 e^{(\xi - \sqrt{2}\text{Re}(\alpha))^2}$, tiende a infinito cuando $\xi \rightarrow \infty$ y por ello no es integrable.

Así, \hat{a}^\dagger no tiene *ningún* vector propio en \mathcal{H} . En particular, no tiene a $\alpha=0$ como valor propio, lo cual implica que los vectores de la base (3.10) nunca se anulan, y confirma que el espectro de \hat{n} es todo \mathbb{N} .

Nos enfocamos ahora en el operador de aniquilación, cuya estructura es mucho más rica. Para empezar, sí tiene vectores propios, que pueden encontrarse de manera idéntica al desarrollo anterior con el único cambio – crucial – de un signo. Así, la ecuación

$\hat{a}|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\xi} + i\hat{\pi})|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ tiene como solución al estado $|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \psi_{\alpha}(\xi) |\xi\rangle$ con función de onda $\psi_{\alpha}(\xi) = Ae^{-\frac{1}{2}(\xi - \sqrt{2}\alpha)^2}$. Aquí el estado sí es normalizable, y al igual que con el vacío, $|0\rangle$, se tiene $|A| = \pi^{-1/4}$. Por supuesto, el vacío es un caso particular, con $\alpha = 0$.

Alternativamente, pueden buscarse los vectores propios en términos de la base de número. Así, se postula el estado $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$ y se le obliga a cumplir

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha c_n |n\rangle &= \alpha |\alpha\rangle = \hat{a} |\alpha\rangle = \hat{a} \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \hat{a} |n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \sqrt{n+1} |n\rangle, \end{aligned}$$

que se reduce a una relación de recurrencia de dos términos, $\alpha c_n = \sqrt{n+1} c_{n+1} \forall n \geq 0$, o bien $c_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} c_{n-1} \forall n \geq 1$. Esto deja libre a c_0 , y da a los demás como $c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0$. Al igual que con la constante A , puede encontrarse el módulo de c_0 pidiendo que $|\alpha\rangle$ esté normalizado:

$$1 = \langle \alpha | \alpha \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |c_0|^2 e^{|\alpha|^2},$$

con lo cual $|c_0| = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$. Así, para algunas fases $e^{i\theta}$ y $e^{i\phi}$,

$$|\alpha\rangle = e^{i\theta} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{i\phi} \pi^{-1/4} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\frac{1}{2}(\xi - \sqrt{2}\alpha)^2} |\xi\rangle.$$

Las fases $e^{i\theta}$ y $e^{i\phi}$ no pueden encontrarse, pero sí su diferencia, multiplicando por la izquierda por $\langle 0|$, lo cual da

$$\begin{aligned} e^{i\theta} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} &= e^{i\phi} \pi^{-1/4} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\frac{1}{2}(\xi - \sqrt{2}\alpha)^2} \langle 0 | \xi \rangle \\ \Rightarrow e^{i(\theta - \phi)} &= \frac{e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\frac{1}{2}(\xi - \sqrt{2}\alpha)^2} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\frac{1}{2}(\xi^2 - 2\sqrt{2}\alpha\xi + 2\alpha^2)} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-(\xi^2 - \sqrt{2}\alpha\xi + \alpha^2)} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-(\xi^2 - \alpha/\sqrt{2})^2} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \\ &= e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} = e^{\frac{1}{2}(|\alpha|^2 - \alpha^2)} = e^{\frac{1}{2}\alpha(\alpha^* - \alpha)}. \end{aligned}$$

La convención para las fases es tomar $\theta = 0$, lo cual hace que $e^{i\phi} = e^{\frac{1}{2}\alpha(\alpha-\alpha^*)}$, es decir, $\phi = \alpha \frac{\alpha-\alpha^*}{2i}$. Así, se obtiene

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{\frac{1}{2}\alpha(\alpha-\alpha^*)} \pi^{-1/4} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\frac{1}{2}(\xi-\sqrt{2}\alpha)^2} |\xi\rangle. \quad (3.11)$$

Estos estados se conocen como *estados coherentes*, y aunque fueron descubiertos por Schrödinger en 1926 [52, 49], no encontraron usos importantes hasta su redescubrimiento por Glauber [22], Klauder [26, 27], y Sudarshan [53], en 1963. A partir de entonces han sido utilizados frecuentemente [21, pp. 43-73], debido a varias de sus propiedades. En particular, como minimizan el producto de incertidumbres $\Delta\xi\Delta\pi$, representan la mejor aproximación dentro del formalismo cuántico al oscilador armónico clásico; esto se apoya en que su evolución temporal, como veremos más adelante, preserva la forma de la función de onda y mueve al centroide senoidalmente. Además, tienen propiedades analíticas particularmente nobles (que pueden generalizarse considerablemente a otros espacios [28, 42, 61]), mismas que describiremos a continuación.

Es importante notar que (3.11) vale para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$: es decir, el espectro del operador de aniquilación no sólo no es vacío – como el del operador de creación – sino que es *todo* el plano complejo. Esto pudiera parecer una contradicción con el hecho de que \hat{a} no puede tener una base de vectores propios, pero no lo es ya que los estados coherentes no son ni ortogonales ni linealmente independientes. De hecho,

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\beta\rangle &= \left(e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}} \langle n| \right) \left(e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*\beta)^n}{n!} \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha^*\beta} \end{aligned}$$

que nunca se anula. En particular,

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2 - |\beta|^2 + \alpha^*\beta + \alpha\beta^*} = e^{-|\alpha-\beta|^2},$$

y la fase del producto interno es $\frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{|\langle\alpha|\beta\rangle|} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha^*\beta} e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \frac{1}{2}|\beta|^2 - \frac{1}{2}\alpha^*\beta - \frac{1}{2}\alpha\beta^*} = e^{\frac{1}{2}(\alpha^*\beta - \alpha\beta^*)}$. En resumen,

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{\frac{1}{2}(\alpha^*\beta - \alpha\beta^*)} e^{-\frac{1}{2}|\alpha-\beta|^2}. \quad (3.12)$$

El aspecto de los estados coherentes que es realmente extraño es que, aunque no son independientes, sí generan a todo el espacio de Hilbert. Para ver esto hay que integrar los proyectores $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ sobre todo el plano complejo, con elemento de *área* $d^2\alpha$. La integración se hace posible cambiando a coordenadas polares, con $\alpha = \nu e^{i\theta}$ y $d^2\alpha = \nu d\nu d\theta$. Así,

$$\int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \int d^2\alpha \left(e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right) \left(e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}} \langle m| \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int d^2\alpha e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}} |n\rangle \langle m| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \nu e^{-\nu^2} \frac{\nu^n e^{in\theta}}{\sqrt{n!}} \frac{\nu^m e^{-im\theta}}{\sqrt{m!}} d\theta d\nu |n\rangle \langle m| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}} |n\rangle \langle m| \int_0^{\infty} \nu^n \nu^m e^{-\nu^2} \nu d\nu \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}} |n\rangle \langle m| \int_0^{\infty} \nu^n \nu^m e^{-\nu^2} \nu d\nu 2\pi \delta_{nm} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi}{n!} |n\rangle \langle n| \int_0^{\infty} \nu^{2n} e^{-\nu^2} \nu d\nu, \text{ y con } \mu = \nu^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{n!} |n\rangle \langle n| \int_0^{\infty} \mu^n e^{-\mu} d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{n!} |n\rangle \langle n| \Gamma(n+1),
\end{aligned}$$

que, como $\Gamma(n+1) = n!$, deja

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1, \quad (3.13)$$

ya que la base de número genera a todo \mathcal{H} al ser todos los vectores propios de un operador autoadjunto.

En particular, multiplicando (3.13) a la derecha por $|\beta\rangle$ se obtiene la identidad $|\beta\rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha|\beta\rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{\frac{1}{2}(\alpha^*\beta - \alpha\beta^*)} e^{-\frac{1}{2}|\alpha-\beta|^2} |\alpha\rangle$, misma que demuestra que los estados coherentes *no* son linealmente independientes.

Esto completa un primer análisis de la estructura analítica del operador de aniquilación: tiene exactamente un vector propio, de norma finita, para cada número complejo, mismos que generan a todo el espacio estado aunque no son ortogonales ni linealmente independientes. Por ello, se dice que los estados coherentes son *sobrecompletos*; matemáticamente su estructura se conoce como un marco tenso de espacio vectorial (*tight frame for a vector space*) [58].

Como ya mencionamos, los estados coherentes tienen propiedades físicas particularmente nobles. Sin embargo, en vez de desarrollarlas en detalle las consideraremos, junto con las propiedades analíticas ya demostradas, como motivación para estudiar más a fondo su estructura analítica, que todavía tiene sorpresas que dar.

3.4.2. Bloques de Jordan

Es fácil considerar a la acción de \hat{a} como resuelta al descubrir que los estados coherentes generan al espacio de estados \mathcal{H} . Pensar eso, sin embargo, ignora aspectos

que ya han sido considerados. Uno de ellos, crucial, es la acción de \hat{a} en la base de número, $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, que puede ser reescrita como

$$\hat{a} \left(\frac{1}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle & \text{si } n \neq 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Esto pudiera parecer barroco en primera instancia, pero es exactamente la forma de un *bloque de Jordan*. Esa es una de las formas canónicas a las que se puede llevar una matriz; a continuación recordamos algunas de sus propiedades.

Paréntesis matemático 3.1. Bloques de Jordan

Es un hecho bien conocido que no toda matriz es diagonalizable; por ejemplo, eso motiva el uso de operadores autoadjuntos en mecánica cuántica, pues siempre son diagonalizables. En general, una matriz arbitraria ni siquiera tiene que tener valores propios; el ejemplo clásico de esto son matrices de rotación, como por ejemplo

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico es $\det(R - \lambda I) = \lambda^2 + 1$ y siempre es positivo para λ real. Este problema particular desaparece si se trabaja sobre los números complejos, donde todo polinomio tiene por lo menos una raíz (que puede ser única si su multiplicidad es igual al grado del polinomio) y por ello toda matriz tiene por lo menos un valor propio.

Más concretamente, para cada matriz M con entradas complejas existe un número complejo λ tal que $\det(M - \lambda I) = 0$. Eso implica que el sistema $(M - \lambda I)v = 0$ es singular, así que tiene por lo menos una solución no trivial. Dicha solución es un vector propio no nulo v de M , con $Mv = \lambda v$.

Sin embargo, no hay manera de garantizar la existencia de más vectores propios. El ejemplo patológico típico es un “esfuerzo cortante”, una matriz como

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cuya acción se muestra en la figura 3.1. El polinomio característico de M es claramente $(\lambda - 1)^2$, de modo que el único valor propio puede ser 1, y de hecho $e = (1, 0)^t$ es un vector propio, con $Me = e$. Sin embargo, si se busca un segundo vector propio hay que resolver el sistema $(M - I)v = 0$, que si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ toma la forma

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como todas las soluciones tienen $y = 0$, existe únicamente un vector propio, que corresponde a un valor propio de multiplicidad 2. Es decir, M no es diagonalizable.

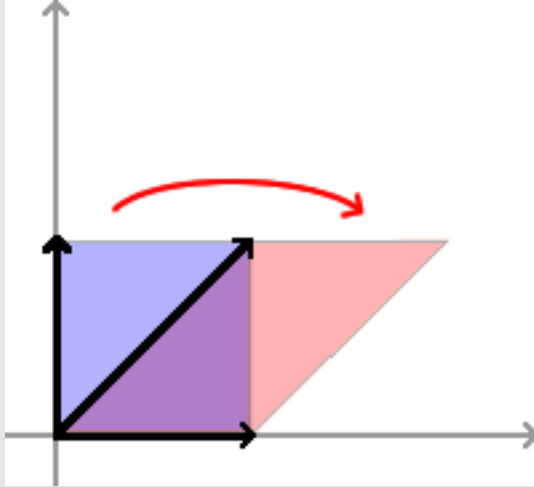


Figura 3.1: Acción geométrica de un “esfuerzo cortante” (en particular, la matriz M del texto): puede visualizarse al cuadrado azul como un elemento de un fluido viscoso colocado entre dos planos, uno fijo a $y = 0$ y uno a $y = 1$ que se desliza sobre el fluido, arrastrándolo.

Es similar a una suma directa de bloques de Jordan. Es decir, aunque una matriz compleja no tenga una base de vectores propios, siempre tiene una base de *vectores propios generalizados*, que cumplen con la propiedad

$$Mv_1 = \lambda v_1, \text{ y} \tag{3.16a}$$

$$Mv_j = \lambda v_j + v_{j-1}, \text{ para } j > 1. \tag{3.16b}$$

Esto es, por supuesto, la expresión algebraica de la matriz (3.15).

Vale la pena notar aquí, para su uso posterior, que aunque el vector propio asociado a un bloque de Jordan es básicamente único (salvo por una constante), los siguientes no lo son. Esto se debe a que si v_2 es un vector propio generalizado, con $Mv_2 = \lambda v_2 + v_1$ y $Mv_1 = \lambda v_1$, entonces $v_2 + cv_1$ también funciona como vector propio generalizado para cualquier constante c . En general, habiendo fijado a v_1, \dots, v_j , habrá la libertad de un múltiplo escalar de v_1 al escoger a v_{j+1} .

El problema puede extenderse bastante fácilmente a casos en los que el valor propio es distinto de 1, así como a bloques más grandes para los cuales la multiplicidad del valor propio es mayor pero sigue habiendo un único vector propio. El caso general es de la forma

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

matriz que se conoce como un *bloque de Jordan*.

Uno de los teoremas fundamentales del álgebra lineal es que toda matriz es básicamente de esta forma: toda matriz compleja es

Regresando al operador de aniquilación, se ve que su acción sobre la base de número reescalada, en (3.14), es exactamente la descrita por las ecuaciones (3.16), con valor propio $\lambda = 0$. Por eso, \hat{a} ya está en una forma canónica, y en principio no hay por qué buscarle otras formas. (La base de Jordan para \hat{a} es $\left(\frac{|n\rangle}{\sqrt{n!}}\right)$ y no está normalizada. Esto no es ningún motivo de preocupación, ya que sólo los operadores autoadjuntos tienen garantizada una base ortonormal, y un bloque de Jordan de la forma (3.15) está muy lejos de ser autoadjunto.)

Sin embargo, ya habiendo encontrado un bloque de Jordan para uno de los valores propios de \hat{a} , es natural preguntar si existen bloques de Jordan, o por lo menos vectores propios generalizados, para los demás valores propios. Como veremos, la respuesta es afirmativa.

Comenzamos por buscarle un primer vector propio generalizado al estado coherente $|\alpha\rangle$. Es decir, buscamos un estado $|\alpha, 1\rangle$ tal que $\hat{a}|\alpha, 1\rangle = \alpha|\alpha, 1\rangle + |\alpha\rangle$. Esto puede hacerse de dos maneras. La primera es suponer un estado de la forma $|\alpha, 1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$, encontrar una relación de recurrencia para los coeficientes c_n , e intentar resolverla. Así se encuentra una solución, aunque el método es tedioso y su extensión a posteriores vectores propios generalizados involucra cuentas particularmente molestas.

La segunda manera (que, por cierto, sale como una sugerencia natural de la solución por medio de series) viene de notar que

$$\hat{a}(\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle) = (\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)|\alpha\rangle = (\hat{a}^\dagger\alpha + 1)|\alpha\rangle = \alpha(\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle) + |\alpha\rangle.$$

Es decir, $\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle$ es una solución del problema. Sin embargo, como notamos en el Paréntesis, la solución nunca es única, sino que es de la forma $|\alpha, 1\rangle = \hat{a}^\dagger|\alpha\rangle + c|\alpha\rangle$. Como ya vimos, no hay razón para esperar una base ortonormal, pero bien podemos calcular la norma de este vector, y de ser posible pedir que sea ortogonal a $|\alpha\rangle$. Así,

$$\begin{aligned} \langle\alpha, 1|\alpha, 1\rangle &= \left(\langle\alpha|\hat{a} + c^*\langle\alpha|\right)\left(\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle + c|\alpha\rangle\right) = \left\langle\alpha\left|\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger + c^*\hat{a}^\dagger + c\hat{a} + c^*c\right)\right|\alpha\right\rangle \\ &= \left\langle\alpha\left|\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 + c^*\hat{a}^\dagger + c\hat{a} + c^*c\right)\right|\alpha\right\rangle \\ &= \langle\alpha|(\alpha^*\alpha + 1 + c^*\alpha^* + c\alpha + c^*c)|\alpha\rangle \text{ pues } \hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \text{ y } \langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \langle\alpha|\alpha^* \\ &= \alpha^*\alpha + 1 + c^*\alpha^* + c\alpha + c^*c \text{ pues } \langle\alpha|\alpha\rangle = 1 \\ &= \alpha^*(\alpha + c^*) + c(\alpha + c^*) + 1 = (\alpha^* + c)(\alpha + c^*) + 1 = |\alpha^* + c|^2 + 1, \end{aligned}$$

mientras que

$$\langle\alpha|\alpha, 1\rangle = \langle\alpha|\left(\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle + c|\alpha\rangle\right) = \langle\alpha|(\alpha^*|\alpha\rangle + c|\alpha\rangle) = \alpha^* + c.$$

Se obtiene, así, que puede asegurarse *simultáneamente* que el vector propio generalizado sea ortogonal al vector propio y que el vector propio generalizado sea de norma mínima (que, además, es 1), escogiendo a $c = -\alpha^*$. Esto lleva a la definición

$$|\alpha, 1\rangle := \left(\hat{a}^\dagger - \alpha^*\right)|\alpha\rangle. \quad (3.17)$$

Dichos estados cumplen

$$\begin{aligned}\hat{a} |\alpha, 1\rangle &= \alpha |\alpha, 1\rangle + |\alpha\rangle \\ \langle \alpha, 1 | \alpha, 1\rangle &= 1 \\ \langle \alpha | \alpha, 1\rangle &= 0.\end{aligned}$$

Una de las propiedades particularmente importantes de los estados $\{|\alpha, 1\rangle\}$ es que, al igual que los estados coherentes $\{|\alpha\rangle\}$, generan a todo \mathcal{H} . En particular,

$$\begin{aligned}\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, 1\rangle \langle \alpha, 1| &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} (\hat{a}^\dagger - \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha| (\hat{a} - \alpha) \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} [\hat{a}^\dagger |\alpha\rangle \langle \alpha| \hat{a} - \alpha^* |\alpha\rangle \langle \alpha| \hat{a} - \hat{a}^\dagger |\alpha\rangle \langle \alpha| \alpha + \alpha^* |\alpha\rangle \langle \alpha| \alpha],\end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned}\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, 1\rangle \langle \alpha, 1| &= \hat{a}^\dagger \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| \hat{a} - \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \alpha^* |\alpha\rangle \langle \alpha| \hat{a} - \hat{a}^\dagger \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| \alpha \\ &\quad + \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \alpha^* |\alpha\rangle \langle \alpha| \alpha \\ &= \hat{a}^\dagger \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| \hat{a} - \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| \alpha^* \hat{a} - \hat{a}^\dagger \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| \\ &\quad + \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| \alpha^* \\ &= \hat{a}^\dagger \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| \hat{a} - \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \hat{a} |\alpha\rangle \langle \alpha| \\ &\quad + \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \hat{a} |\alpha\rangle \langle \alpha| \hat{a}^\dagger \\ &= \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger = [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Otra propiedad que será útil más adelante es la integral

$$\begin{aligned}\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, 1\rangle \langle \alpha| &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} (\hat{a}^\dagger - \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha| = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} [\hat{a}^\dagger |\alpha\rangle \langle \alpha| - \alpha^* |\alpha\rangle \langle \alpha|] \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \hat{a}^\dagger |\alpha\rangle \langle \alpha| - \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \alpha^* |\alpha\rangle \langle \alpha| = \hat{a}^\dagger \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| - \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| \alpha^* \\ &= \hat{a}^\dagger \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| - \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| \hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger = 0.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Debido a todo lo anterior, los estados $|\alpha, 1\rangle = (\hat{a}^\dagger - \alpha^*) |\alpha\rangle$ son claramente útiles. Si queremos extenderlos para obtener más vectores de la cadena de Jordan, el candidato natural son los vectores

$$(\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^k |\alpha\rangle.$$

Para poder manejarlos, observamos que debido al conmutador $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ se tiene que $[\hat{a} - \alpha, \hat{a}^\dagger - \alpha^*] = 1$, ya que las constantes conmutan con todo. De ahí se obtiene, de la misma manera que el conmutador $[\hat{\xi}, \hat{\pi}^k] = ki\hat{\pi}^{k-1}$ del principio de este capítulo, el resultado

$$\left[(\hat{a} - \alpha), (\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^k \right] = k (\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^{k-1}.$$

Así,

$$\begin{aligned} (\hat{a} - \alpha) (\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^k |\alpha\rangle &= \left[(\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^k (\hat{a} - \alpha) + k (\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^{k-1} \right] |\alpha\rangle \\ &= k (\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^{k-1} |\alpha\rangle, \end{aligned}$$

o alternativamente

$$\hat{a} \frac{(\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^k |\alpha\rangle}{k!} = \alpha \frac{(\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^k |\alpha\rangle}{k!} + \frac{(\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^{k-1} |\alpha\rangle}{(k-1)!},$$

que es exactamente la propiedad de Jordan, (3.16b).

Antes de definir a estos estados como los nuevos vectores propios generalizados $|\alpha, k\rangle$, vale la pena calcular su norma:

$$\begin{aligned} \left| (\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^k |\alpha\rangle \right|^2 &= \left\langle \alpha \left| (\hat{a} - \alpha)^k (\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^k \right| \alpha \right\rangle \\ &= \left\langle \alpha \left| (\hat{a} - \alpha)^{k-1} \left\{ (\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^k (\hat{a} - \alpha) + k (\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^{k-1} \right\} \right| \alpha \right\rangle \\ &= k \left\langle \alpha \left| (\hat{a} - \alpha)^{k-1} (\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^{k-1} \right| \alpha \right\rangle, \text{ y análogamente} \\ &= k(k-1) \left\langle \alpha \left| (\hat{a} - \alpha)^{k-2} (\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^{k-2} \right| \alpha \right\rangle \\ &\quad \vdots \\ &= k(k-1) \cdots 2 \left\langle \alpha \left| (\hat{a} - \alpha)^1 (\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^1 \right| \alpha \right\rangle \\ &= k(k-1) \cdots 2 \cdot 1 \left\langle \alpha \left| (\hat{a} - \alpha)^0 (\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^0 \right| \alpha \right\rangle \\ &= k(k-1) \cdots 2 \cdot 1 \langle \alpha | \alpha \rangle \\ &= k!. \end{aligned}$$

Por ello, nuestros candidatos a vectores propios generalizados tendrán norma

$$\left| \frac{1}{k!} (\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^k |\alpha\rangle \right| = \frac{1}{\sqrt{k!}}.$$

Si bien esto no es un inconveniente terrible, conviene más que dichos vectores estén normalizados a la unidad – tanto por la propiedad en sí como para simplificar los factores numéricos más adelante. Esa definición lleva a escoger

$$|\alpha, k\rangle := \frac{1}{\sqrt{k!}} \left(\hat{a}^\dagger - \alpha^* \right)^k |\alpha\rangle. \quad (3.20)$$

Esto implica, en particular, que la propiedad de Jordan (3.16b) no se cumple exactamente; más bien toma la forma equivalente

$$\hat{a} |\alpha, k\rangle = \alpha |\alpha, k\rangle + \sqrt{k} |\alpha, k-1\rangle, \quad (3.21)$$

que difiere únicamente en un factor numérico que será menos molesto que los que nos ahorra la definición (3.20). En particular,

$$\langle \alpha, k | \alpha, k \rangle = 1. \quad (3.22)$$

Procedemos ahora a explorar las propiedades analíticas de los estados definidos por (3.20), a los que nos podemos referir como *estados coherentes generalizados*. En particular, vimos ya que los primeros (con $k = 1$) generan a todo \mathcal{H} , al igual que los estados coherentes, lo cual lleva a la pregunta de si todos los estados coherentes generalizados generan, integrando sobre una misma “capa”, a \mathcal{H} . Dicha pregunta se responde calculando, de manera análoga a (3.18); el paso crucial es la penúltima igualdad, en la que se utiliza la propiedad de Jordan, (3.21), para hacer actuar al escalar α^* – que, como tal, conmuta con $|\alpha, k-1\rangle\langle \alpha, k|$ – como operador.

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k\rangle \langle \alpha, k| &= \int \frac{d^2\alpha}{\sqrt{k!}\pi} \left(\hat{a}^\dagger - \alpha^* \right)^k |\alpha\rangle \langle \alpha, k| \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\sqrt{k}\pi} \left(\hat{a}^\dagger - \alpha^* \right) |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k|, \quad \text{por (3.20) cambiando } k \text{ por } k-1, \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\sqrt{k}\pi} \left[\hat{a}^\dagger |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k| - \alpha^* |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k| \right] \\ &= \hat{a}^\dagger \int \frac{d^2\alpha}{\sqrt{k}\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k| - \int \frac{d^2\alpha}{\sqrt{k}\pi} \alpha^* |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k| \\ &= \hat{a}^\dagger \int \frac{d^2\alpha}{\sqrt{k}\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k| - \int \frac{d^2\alpha}{\sqrt{k}\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k| \alpha^* \\ &= \hat{a}^\dagger \int \frac{d^2\alpha}{\sqrt{k}\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k| - \int \frac{d^2\alpha}{\sqrt{k}\pi} |\alpha, k-1\rangle \left(\langle \alpha, k| \hat{a}^\dagger - \langle \alpha, k-1| \sqrt{k} \right), \end{aligned}$$

por la adjunta de la ecuación (3.21), con lo cual

$$\begin{aligned} &= \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{k}} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k| - \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k| \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{k}} \\ &+ \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k-1|. \end{aligned}$$

Así, el siguiente paso es claramente calcular

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k| &= \int \frac{d^2\alpha}{\sqrt{k}\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k-1| (\hat{a} - \alpha) \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\sqrt{k}\pi} \left[|\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k-1| \hat{a} - |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k-1| \alpha \right] \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\sqrt{k}\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k-1| \hat{a} - \int \frac{d^2\alpha}{\sqrt{k}\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k-1| \alpha \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\sqrt{k}\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k-1| \hat{a} - \int \frac{d^2\alpha}{\sqrt{k}\pi} \alpha |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k-1| \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\sqrt{k}\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k-1| \hat{a} \\
&\quad - \int \frac{d^2\alpha}{\sqrt{k}\pi} \left(\hat{a} |\alpha, k-1\rangle - \sqrt{k-1} |\alpha, k-2\rangle \right) \langle \alpha, k-1|,
\end{aligned}$$

de nuevo por (3.21), lo que da finalmente

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k| &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k-1| \frac{\hat{a}}{\sqrt{k}} \\
&\quad - \frac{\hat{a}}{\sqrt{k}} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k-1| \\
&\quad - \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k-2\rangle \langle \alpha, k-1|.
\end{aligned}$$

Para no perderse en este mar de cuentas, es importante fijarse únicamente en los objetos involucrados únicamente al inicio y al final de estas dos igualdades. En particular, empiezan con dos integrales de la forma

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k\rangle \langle \alpha, k| \quad \text{y} \quad \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k|,$$

que quedan en términos de las integrales

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k-1| \quad \text{y} \quad \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k-2\rangle \langle \alpha, k-1|,$$

de forma idéntica pero con el índice k reducido en uno.

Es aquí que entra en juego la integral (3.19), pues nos permite completar la pareja de integrales en el caso $k = 1$ (entendiendo $|\alpha, 0\rangle = |\alpha\rangle$, notación consistente con la cadena de Jordan (3.21) utilizada en el cálculo anterior), en el cual son iguales a 1 y 0, respectivamente.

Así, lo natural es utilizar esos valores en las igualdades ya obtenidas (lo cual, estrictamente, es válido únicamente para $k = 2$) y ver qué se obtiene. Con ello,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k\rangle \langle \alpha, k| &= \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{k}} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k| - \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k| \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{k}} \\ &+ \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k-1| \\ &= \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{k}} 0 - 0 \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{k}} + 1 = 1 \end{aligned}$$

para la primera y

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k| &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k-1| \frac{\hat{a}}{\sqrt{k}} \\ &- \frac{\hat{a}}{\sqrt{k}} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k-1| - \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k-2\rangle \langle \alpha, k-1| \\ &= 1 \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{k}} - \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{k}} 1 + 0 = 0 \end{aligned}$$

para la segunda. Esto completa el cálculo: por inducción matemática, debe tenerse

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k\rangle \langle \alpha, k| = 1 \quad \text{y} \quad \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k\rangle \langle \alpha, k+1| = 0 \quad \forall k \geq 0. \quad (3.23)$$

Más aún, la segunda propiedad puede ahora extenderse fácilmente, mediante

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k\rangle \langle \alpha, k+2| &= \int \frac{d^2\alpha}{\sqrt{k+2}\pi} |\alpha, k\rangle \langle \alpha, k+1| (\hat{a} - \alpha) \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k\rangle \langle \alpha, k+1| \frac{\hat{a}}{\sqrt{k+2}} - \int \frac{d^2\alpha}{\sqrt{k+2}\pi} |\alpha, k\rangle \langle \alpha, k+1| \alpha \\ &= - \int \frac{d^2\alpha}{\sqrt{k+2}\pi} \alpha |\alpha, k\rangle \langle \alpha, k+1| \\ &= 0 - \int \frac{d^2\alpha}{\sqrt{k+2}\pi} (\hat{a} |\alpha, k\rangle - \sqrt{k} |\alpha, k-1\rangle) \langle \alpha, k+1| \\ &= \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+2}} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k-1\rangle \langle \alpha, k+1|, \end{aligned}$$

que se anula para $k = 0$, y por inducción para cualquier k . Un argumento análogo funciona para diferencias mayores entre los índices del bra y el ket, con el resultado de que $\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k\rangle \langle \alpha, k+l| = 0$ para cualquier l positiva. Todo esto puede resumirse de manera particularmente compacta como

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k\rangle \langle \alpha, l| = \delta_{kl}. \quad (3.24)$$

3.5. Productos internos

En la sección anterior obtuvimos la existencia de los estados coherentes generalizados y caracterizamos su comportamiento bajo los operadores de creación y aniquilación. Además, encontramos que el conjunto de estados coherentes generalizados de un índice k fijo genera a todo el espacio \mathcal{H} . Esto crea una estructura de “capas”: una copia del plano complejo \mathbb{C} para cada entero no negativo k .

Demostraremos, adicionalmente, que los estados coherentes generalizados correspondientes a un número complejo fijo α , haciendo variar el índice k , también generan a \mathcal{H} . Para ello hace falta calcular los productos internos entre los distintos estados coherentes generalizados, tanto dentro de una misma capa como de distintas capas.

Un primer caso es fácil, cuando los valores propios coinciden:

$$\begin{aligned}\langle \alpha, 1 | \alpha \rangle &= \langle \alpha | (\hat{a} - \alpha) | \alpha \rangle = 0 \\ \langle \alpha, 2 | \alpha, 1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \alpha, 1 | (\hat{a} - \alpha) | \alpha, 1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \alpha, 1 | \alpha \rangle = 0, \text{ y en general} \\ \langle \alpha, k+1 | \alpha, k \rangle &= \frac{1}{\sqrt{k+1}} \langle \alpha, k | (\hat{a} - \alpha) | \alpha, k \rangle = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \langle \alpha, k | \alpha, k-1 \rangle = 0,\end{aligned}$$

por inducción. Análogamente,

$$\begin{aligned}\langle \alpha, l | \alpha \rangle &= \frac{1}{\sqrt{l}} \langle \alpha, l-1 | (\hat{a} - \alpha) | \alpha \rangle = 0, \text{ y finalmente} \\ \langle \alpha, k+l | \alpha, k \rangle &= \frac{1}{\sqrt{k+l}} \langle \alpha, k+l-1 | (\hat{a} - \alpha) | \alpha, k \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{k+l}} \langle \alpha, k+l-1 | \alpha, k-1 \rangle = 0,\end{aligned}$$

de nuevo por inducción. Esto puede resumirse de manera compacta como

$$\langle \alpha, k | \alpha, l \rangle = \delta_{kl}. \quad (3.25)$$

Igualmente, conocemos ya el producto interno entre dos estados coherentes, (3.12), igual a

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{i \operatorname{Im}(\alpha^* \beta)} e^{-\frac{1}{2} |\alpha - \beta|^2},$$

el cual será particularmente útil y aparecerá como factor en cada producto interno de aquí en adelante.

Los primeros productos internos entre estados coherentes generalizados pueden

calcularse, a mano, fácilmente:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, 1 | \beta \rangle &= \langle \alpha | (\hat{a} - \alpha) | \beta \rangle = (\beta - \alpha) \langle \alpha | \beta \rangle \text{ y en general} \\
\langle \alpha, k | \beta \rangle &= \frac{1}{\sqrt{k!}} \langle \alpha | (\hat{a} - \alpha)^k | \beta \rangle = \frac{(\beta - \alpha)^k}{\sqrt{k!}} \langle \alpha | \beta \rangle ; \\
\langle \alpha, 1 | \beta, 1 \rangle &= \langle \alpha | (\hat{a} - \alpha)(\hat{a}^\dagger - \beta^*) | \beta \rangle = \langle \alpha | [1 + (\hat{a}^\dagger - \beta^*)(\hat{a} - \alpha)] | \beta \rangle \\
&= (1 - |\beta - \alpha|^2) \langle \alpha | \beta \rangle , \\
\langle \alpha, 2 | \beta, 1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \alpha | (\hat{a} - \alpha)^2 (\hat{a}^\dagger - \beta^*) | \beta \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \alpha | [2(\hat{a} - \alpha) + (\hat{a}^\dagger - \beta^*)(\hat{a} - \alpha)^2] | \beta \rangle \\
&= \frac{2 - |\beta - \alpha|^2}{\sqrt{2}} (\beta - \alpha) \langle \alpha | \beta \rangle , \text{ y} \\
\langle \alpha, k | \beta, 1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{k!}} \langle \alpha | (\hat{a} - \alpha)^k (\hat{a}^\dagger - \beta^*) | \beta \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!}} \langle \alpha | [k(\hat{a} - \alpha)^{k-1} + (\hat{a}^\dagger - \beta^*)(\hat{a} - \alpha)^k] | \beta \rangle \\
&= \frac{k - |\beta - \alpha|^2}{\sqrt{k!}} (\beta - \alpha)^{k-1} \langle \alpha | \beta \rangle .
\end{aligned}$$

Un último caso particular es de interés:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, 2 | \beta, 2 \rangle &= \frac{1}{2} \langle \alpha | (\hat{a} - \alpha)^2 (\hat{a}^\dagger - \beta^*)^2 | \beta \rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle \alpha | [2 + 4(\hat{a}^\dagger - \beta^*)(\hat{a} - \alpha) + (\hat{a}^\dagger - \beta^*)^2(\hat{a} - \alpha)^2] | \beta \rangle \\
&= \frac{2 - 4|\beta - \alpha|^2 + |\beta - \alpha|^4}{2} \langle \alpha | \beta \rangle , \text{ mientras que} \\
\langle \alpha, k | \beta, 2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{k!2!}} \langle \alpha | (\hat{a} - \alpha)^k (\hat{a}^\dagger - \beta^*)^2 | \beta \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!2!}} \langle \alpha | [(\hat{a}^\dagger - \beta^*)(\hat{a} - \alpha)^k + k(\hat{a} - \alpha)^{k-1}] (\hat{a}^\dagger - \beta^*) | \beta \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!2!}} \langle \alpha | [(\hat{a}^\dagger - \beta^*)(\hat{a} - \alpha)^k (\hat{a}^\dagger - \beta^*) + k(\hat{a} - \alpha)^{k-1} (\hat{a}^\dagger - \beta^*)] | \beta \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!2!}} \langle \alpha | [(\hat{a}^\dagger - \beta^*) ((\hat{a}^\dagger - \beta^*)(\hat{a} - \alpha)^k + k(\hat{a} - \alpha)^{k-1})] | \beta \rangle \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{k!2!}} \langle \alpha | [k((\hat{a}^\dagger - \beta^*)(\hat{a} - \alpha)^{k-1} + (k-1)(\hat{a} - \alpha)^{k-2})] | \beta \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!2!}} \langle \alpha | [(\alpha^* - \beta^*) ((\alpha^* - \beta^*)(\beta - \alpha)^k + k(\beta - \alpha)^{k-1})] | \beta \rangle \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{k!2!}} \langle \alpha | [k((\alpha^* - \beta^*)(\beta - \alpha)^{k-1} + (k-1)(\beta - \alpha)^{k-2})] | \beta \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\alpha^* - \beta^*)^2(\beta - \alpha)^k + 2k(\alpha^* - \beta^*)(\beta - \alpha)^{k-1} + k(k-1)(\beta - \alpha)^{k-2}}{\sqrt{k!2!}} \langle \alpha | \beta \rangle \\
&= \frac{|\beta - \alpha|^4 - 2k|\beta - \alpha|^2 + k(k-1)}{\sqrt{k!2!}} (\beta - \alpha)^{k-2} \langle \alpha | \beta \rangle.
\end{aligned}$$

Con esto puede establecerse un patrón general: para $k > l$, el producto interno $\langle \alpha, k | \beta, l \rangle$ será igual al producto de $\langle \alpha | \beta \rangle$ con $(\beta - \alpha)^{k-l}$, el factor numérico $1/\sqrt{k!l!}$, y un polinomio en $|\alpha - \beta|^2$. Para poder avanzar en el análisis, a falta de más información sobre dichos polinomios, primero les ponemos nombre. Es decir, postulamos la existencia de polinomios P_k^{k-l} tales que, para $k \geq l$,

$$\langle \alpha, k | \beta, l \rangle = (\beta - \alpha)^{k-l} P_k^{k-l} (|\beta - \alpha|^2) \frac{\langle \alpha | \beta \rangle}{\sqrt{k!l!}}.$$

El problema se convierte, entonces, en encontrar dichos polinomios.

Esto se hace mediante una relación de recurrencia, que es básicamente lo único que permite la información con que se cuenta sobre ellos. Empezamos atacando el caso más sencillo, cuando $k = l$:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, k | \beta, k \rangle &= \frac{1}{\sqrt{k}} \langle \alpha, k | (\hat{a}^\dagger - \beta^*) | \beta, k-1 \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\langle \alpha, k | (\alpha^* - \beta^*) | \beta, k-1 \rangle + \sqrt{k} \langle \alpha, k-1 | \beta, k-1 \rangle \right) \\
&= \frac{\alpha^* - \beta^*}{\sqrt{k}} \langle \alpha, k | \beta, k-1 \rangle + \langle \alpha, k-1 | \beta, k-1 \rangle.
\end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo la definición de P_k^{k-l} , se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{P_k^0 (|\beta - \alpha|^2)}{k!} &= \frac{\alpha^* - \beta^*}{\sqrt{k}} (\beta - \alpha) \frac{P_k^1 (|\beta - \alpha|^2)}{\sqrt{k!(k-1)!}} + \frac{P_{k-1}^0 (|\beta - \alpha|^2)}{(k-1)!} \\
&= \frac{1}{k!} [-|\beta - \alpha|^2 P_k^1 (|\beta - \alpha|^2) + k P_{k-1}^0 (|\beta - \alpha|^2)].
\end{aligned}$$

Esto da una relación de recurrencia, pero es entre dos familias de polinomios, P_k^0 y P_k^1 , de modo que se requiere otra relación. Ésta se obtiene, por supuesto, de desarrollar el producto interno asociado a P_k^1 :

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, k | \beta, k-1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{k}} \langle \alpha, k-1 | (\hat{a} - \alpha) | \beta, k-1 \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\langle \alpha, k-1 | (\beta - \alpha) | \beta, k-1 \rangle + \sqrt{k-1} \langle \alpha, k-1 | \beta, k-2 \rangle \right),
\end{aligned}$$

de donde

$$P_k^1(|\beta - \alpha|^2) = P_{k-1}^0(|\beta - \alpha|^2) + (k-1)P_{k-1}^1(|\beta - \alpha|^2).$$

Es decir, se tiene la relación de recurrencia (doble)

$$\begin{cases} P_k^0(x) = -xP_k^1(x) + kP_{k-1}^0(x) & (3.26a) \\ P_k^1(x) = P_{k-1}^0(x) + (k-1)P_{k-1}^1(x). & (3.26b) \end{cases}$$

Esto confirma, de un golpe, que las funciones P_k^0 y P_k^1 (que en principio serían funciones arbitrarias de α y β) son polinomios en $x = |\beta - \alpha|^2$ y, más aún, indica que son de grado k y $k-1$ respectivamente, tienen coeficientes enteros, y tienen coeficiente principal $(-1)^k$. Además, pueden calcularse con facilidad los primeros polinomios:

$$\begin{aligned} P_0^0(x) &= 1 & P_1^1(x) &= 1 \\ P_1^0(x) &= 1 - x & P_2^1(x) &= 2 - x \\ P_2^0(x) &= 2 - 4x + x^2 & P_3^1(x) &= 6 - 6x + x^2 \\ P_3^0(x) &= 6 - 18x + 9x^2 - x^3 & P_4^1(x) &= 24 - 36x + 12x^2 - x^3 \\ P_4^0(x) &= 24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4 \end{aligned}$$

Consultando cualquier texto sobre funciones especiales⁴ puede verse que estos son exactamente los polinomios de Laguerre, salvo por factores de normalización. Es decir, para estos primeros casos se cumple

$$P_k^0(x) = k!L_k(x) := e^x \frac{d^k}{dx^k} [x^k e^{-x}], \text{ y} \quad (3.27a)$$

$$P_k^1(x) = (k-1)!L_{k-1}^{(1)}(x) := -(k-1)! \frac{d}{dx} [L_k(x)]. \quad (3.27b)$$

Así, la meta es demostrar estas relaciones para todo valor de k . Como la única información que tenemos sobre las P_k 's es su relación de recurrencia, tendrá que ser con esa herramienta. Sin embargo, las relaciones de recurrencia para los polinomios de Laguerre son bastante menos complicadas y, en particular, están desacopladas:

$$\begin{cases} (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x) & (3.28a) \\ (n+1)L_{n+1}^{(k)}(x) = (2n+1+k-x)L_n^{(k)}(x) - (n+k)L_{n-1}^{(k)}(x) & (3.28b) \end{cases}$$

Es decir, en cada relación de recurrencia ocurren únicamente polinomios de un mismo tipo, $L_n^{(k)}$ o L_n , de distinto grado.

⁴Aquí seguimos la normalización y los resultados de [1] y [4], que coinciden en sus definiciones para $L_n(x)$ y $L_n^{(k)}(x)$.

Para salvar esta diferencia, notamos que las recurrencias (3.26) pueden desacoplarse parcialmente, sustituyendo (3.26b) en sí misma:

$$\begin{aligned}
 P_k^1(x) &= P_{k-1}^0(x) + (k-1)P_{k-1}^1(x) \\
 &= P_{k-1}^0(x) + (k-1)(P_{k-2}^0(x) + (k-2)P_{k-2}^1(x)) \\
 &\quad \vdots \\
 &= P_{k-1}^0(x) + (k-1)P_{k-2}^0(x) + (k-1)(k-2)P_{k-2}^0(x) \\
 &\quad + \cdots + (k-1)(k-2)\cdots 2 \cdot 1P_0^0(x),
 \end{aligned}$$

que puede expresarse como

$$P_k^1(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(k-1)!}{j!} P_j^0(x), \quad (3.29)$$

lo cual permite expresar a cada $P_k^1(x)$ exclusivamente en términos de las $P_j^0(x)$. Esta relación puede sustituirse en (3.26a) para obtener una relación de recurrencia únicamente en las $P_k^0(x)$:

$$P_k^0(x) = -x \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(k-1)!}{j!} P_j^0(x) + kP_{k-1}^0(x). \quad (3.30)$$

Sin embargo, esto tiene la desventaja de que cada P_k^0 no queda expresada en términos de las dos anteriores, sino de *todas* las anteriores. Para remediar esto, en vez de intentar “limpiar” la recurrencia (3.30) para intentar hacerla coincidir con (3.28a), conviene “ensuciar” (3.28a), mediante un resultado particularmente útil, pero poco conocido fuera de la comunidad de funciones especiales:

Paréntesis matemático 3.2. Fórmula de Christoffel-Darboux

Teorema 1 (Christoffel-Darboux). *Sea $\{f_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ una familia de polinomios ortogonales en $[a, b]$ con respecto a $w(x)$, que cumplen la relación de recurrencia*

$$f_{n+1}(x) = (a_n + b_n x)f_n(x) - c_n f_{n-1}(x).$$

Entonces, si se definen k_n , k'_n y h_n mediante

$$\begin{aligned}
 f_n(x) &= k_n x^n + k'_n x^{n-1} + \cdots \quad y \\
 h_n &= \int_a^b (f_n(x))^2 w(x) dx,
 \end{aligned}$$

se tiene que

$$\sum_{m=0}^n \frac{1}{h_m} f_m(x) f_m(y) = \frac{k_n}{k_{n+1} h_n} \frac{f_{n+1}(x) f_n(y) - f_n(x) f_{n+1}(y)}{x - y}. \quad (3.31)$$

Demostración. (basada en la de [54, pp. 42-44]).

Lo primero es encontrar relaciones de recurrencia para k_n y k'_n . Sustituyendo la recurrencia de las f_n en sus definiciones se obtiene

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= k_{n+1}x^{n+1} + k'_{n+1}x^n + \dots = (a_n + b_nx)f_n(x) - c_nf_{n-1}(x) \\ &= (a_n + b_nx)(k_nx^n + k'_nx^{n-1} + \dots) - c_n(k_{n-1}x^{n-1} + k'_{n-1}x^{n-2} + \dots) \\ &= a_n(k_nx^n + k'_nx^{n-1} + \dots) + b_nx(k_nx^n + k'_nx^{n-1} + \dots) \\ &\quad - c_nk_{n-1}x^{n-1} - c_nk'_{n-1}x^{n-2} - \dots \\ &= b_nk_nx^{n+1} + (a_nk_n + b_nk'_n)x^n + \dots, \end{aligned}$$

que implica que $k_{n+1} = b_nk_n$ y $k'_{n+1} = a_nk_n + b_nk'_n$.

Por otro lado, como los polinomios son ortogonales, al tomar el producto interno de

$$f_{n+1}(x) - b_nx f_n(x) = a_n f_n(x) - c_n f_{n-1}(x)$$

con f_{n+1} y f_{n-1} se obtienen, respectivamente,

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= b_n \int_a^b x f_n(x) f_{n+1}(x) w(x) dx, \quad y \\ b_n \int_a^b x f_n(x) f_{n-1}(x) w(x) dx &= c_n h_{n-1}. \end{aligned}$$

De ahí, cambiando $n + 1$ por n en la primera y sustituyendo, se obtiene

$$h_n = \frac{b_{n-1}}{b_n} c_n h_{n-1}.$$

Puede ahora hacerse un proceso de inducción sobre n . Sustituyendo la relación de recurrencia para las f_n en el lado derecho de (3.31) se obtiene que

$$\begin{aligned}
I_n &:= \frac{k_n}{k_{n+1}h_n} \frac{f_{n+1}(x)f_n(y) - f_n(x)f_{n+1}(y)}{x-y} \\
&= \frac{k_n}{k_{n+1}h_n} \left[\frac{((a_n + b_n x)f_n(x) - c_n f_{n-1}(x))f_n(y)}{x-y} \right. \\
&\quad \left. - \frac{f_n(x)((a_n + b_n y)f_n(y) - c_n f_{n-1}(y))}{x-y} \right] \\
&= \frac{k_n}{k_{n+1}h_n} \frac{b_n(x-y)f_n(x)f_n(y) + c_n(f_n(x)f_{n-1}(y) - f_{n-1}(x)f_n(y))}{x-y} \\
&= \frac{k_n b_n}{k_{n+1}h_n} f_n(x)f_n(y) + \frac{k_n c_n}{k_{n+1}h_n} \frac{f_n(x)f_{n-1}(y) - f_{n-1}(x)f_n(y)}{x-y} \quad (\star) \\
&= \frac{k_n b_n}{b_n k_n h_n} f_n(x)f_n(y) + \frac{b_{n-1} k_{n-1} c_n}{b_n k_n h_n} \frac{f_n(x)f_{n-1}(y) - f_{n-1}(x)f_n(y)}{x-y} \\
&= \frac{f_n(x)f_n(y)}{h_n} + \frac{b_{n-1} k_{n-1} b_n}{b_n k_n h_{n-1}} \frac{f_n(x)f_{n-1}(y) - f_{n-1}(x)f_n(y)}{x-y} \\
&= \frac{f_n(x)f_n(y)}{h_n} + \frac{k_{n-1}}{k_n h_{n-1}} \frac{f_n(x)f_{n-1}(y) - f_{n-1}(x)f_n(y)}{x-y} \\
&= \frac{f_n(x)f_n(y)}{h_n} + I_{n-1}.
\end{aligned}$$

Es decir, I_n cumple la misma relación de recurrencia que la suma $\sum_{m=0}^n \frac{1}{h_m} f_m(x)f_m(y)$, por lo que deben ser iguales si se demuestra que son iguales en un inicio, es decir, el paso base de la inducción.

Para ello basta observar que los cálculos del paso inductivo siguen valiendo si se toma $c_0 = 0$; ello es necesario para que se cumpla el primer caso de la relación de recurrencia, $f_1(x) = (a_0 + b_0 x)f_0(x) - c_0 f_{-1}(x)$, en el entendido de que no existe la función $f_{-1}(x)$ pero ese término es cero. Por ello, el cálculo anterior puede detenerse en el paso marcado (\star) para obtenerse que

$$\frac{k_0}{k_1 h_0} \frac{f_1(x)f_0(y) - f_0(x)f_1(y)}{x-y} = \frac{k_0 b_0}{k_1 h_0} f_0(x)f_0(y) = \frac{f_0(x)f_0(y)}{h_0},$$

lo cual completa la demostración. \blacksquare

Para darle una trascendencia a este teorema más allá de su utilidad en simplificar cuentas, basta ver que la suma que describe,

$$K_n(x, y) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{h_m} f_m(x)f_m(y),$$

es el kernel integral de la proyección ortogonal Π_n sobre el subespacio generado

por los polinomios $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$, de modo que

$$\begin{aligned}\Pi_n(f)(x) &= \int_a^b K_n(x, y) f(y) w(y) dy = \sum_{m=0}^n \frac{1}{h_m} f_m(x) \int_a^b f_m(y) f(y) w(y) dy \\ &= \frac{k_n}{k_{n+1} h_n} \int_a^b \frac{f_{n+1}(x) f_n(y) - f_n(x) f_{n+1}(y)}{x - y} f(y) w(y) dy,\end{aligned}$$

el cual es un operador con un kernel integral mucho más sencillo que antes. Sin embargo, eso nos aleja de nuestro propósito actual.

Para aplicar este teorema a nuestra situación, se escoge $f_n = L_n$, los polinomios de Laguerre, para los cuales los coeficientes relevantes son $k_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ y $h_n = 1$, de modo que $k_n/k_{n+1} + 1 = -(n+1)$ y por ello

$$\sum_{m=0}^n L_m(x) L_m(y) = (n+1) \frac{L_n(x) L_{n+1}(y) - L_{n+1}(x) L_n(y)}{x - y}.$$

Más aún, los polinomios cumplen que $L_n(0) \equiv 1$, de modo que al tomar $y = 0$ se tiene

$$\sum_{m=0}^n L_m(x) = \frac{n+1}{x} (L_n(x) - L_{n+1}(x)). \quad (3.32)$$

De aquí, basta reescribir esta expresión como

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (n+1)L_n(x) - x \sum_{m=0}^n L_m(x)$$

y, recordando la hipótesis (3.27), ponerla en términos de $k!L_k(x)$:

$$k!L_k(x) = k \cdot (k-1)!L_{k-1}(x) - x \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(k-1)!}{m!} m!L_m(x),$$

que es exactamente la ecuación (3.30). Es decir, los polinomios P_k^0 y $k!L_k$ cumplen la misma relación de recurrencia; como además coinciden en sus primeros términos, deben ser iguales.

Esto nos lleva al final de la parte central de la demostración, obteniéndose lo que es probablemente el resultado principal de esta sección:

$$\langle \alpha, k | \beta, k \rangle = L_k(|\beta - \alpha|^2) \langle \alpha | \beta \rangle. \quad (3.33)$$

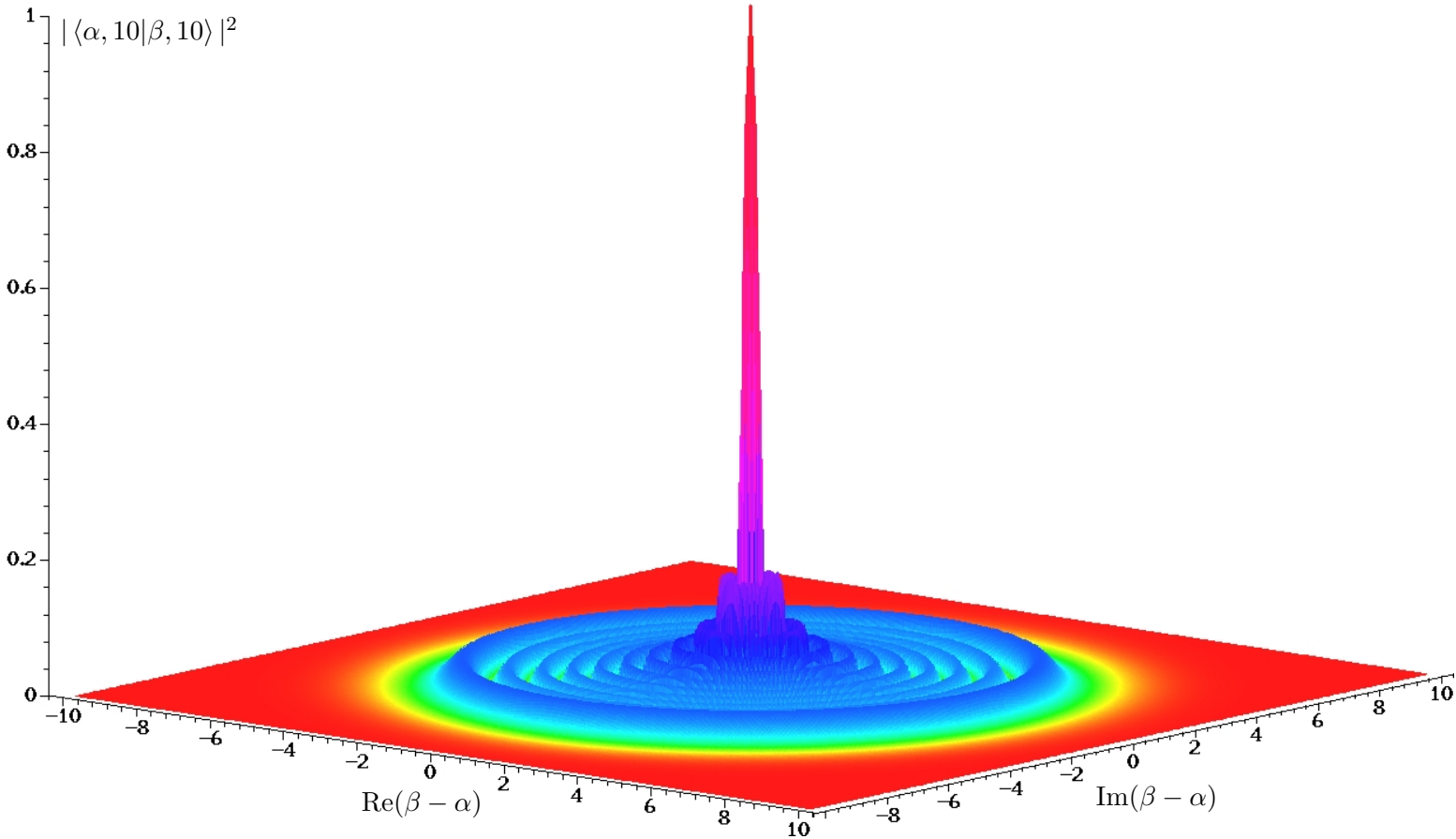


Figura 3.2: Módulo del producto interno entre estados coherentes generalizados del mismo índice: $|\langle \alpha, 10 | \beta, 10 \rangle|^2$ en función de $\beta - \alpha$ sobre el plano complejo. Se observa que la función se encuentra concentrada en un círculo de radio aproximadamente 1 alrededor del origen y posteriormente forma 10 anillos, correspondientes a los 10 ceros de L_{10} . Cuando $k = 10$ la función decae exponencialmente para $|\alpha - \beta| > \left(2(k + \frac{1}{2}) + \sqrt{4(k + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}\right)^{1/2} \approx 7$ (cf. [1], ec. (22.16.8)).

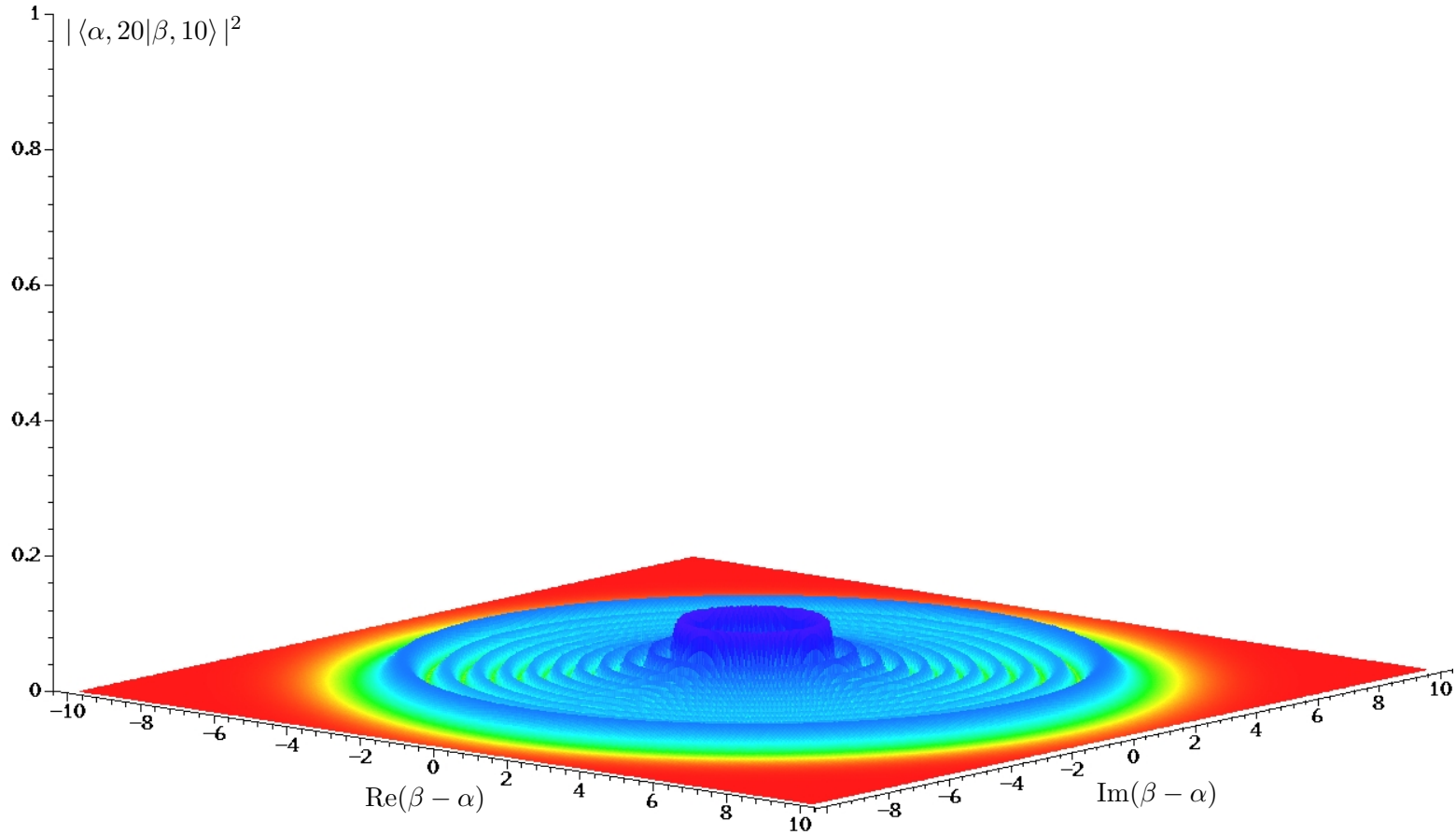


Figura 3.3: Módulo del producto interno entre estados coherentes generalizados de distinto índice: $|\langle \alpha, 20 | \beta, 10 \rangle|^2$ en función de $\beta - \alpha$ sobre el plano complejo. Al igual que con el caso anterior, la función forma anillos, intercalados con los ceros de L_{10}^{10} , y decae exponencialmente para $|\beta - \alpha| \gtrsim 9$ (cf. [1], ec. (22.16.8)). En el centro se encuentra un cero de orden 20 en $|\beta - \alpha|$. La amplitud se concentra en el primer anillo, pero es marcadamente menor que en el caso anterior.

Una de las implicaciones principales de este resultado es que, aunque ningún par de estados coherentes son ortogonales, los estados coherentes generalizados *sí* pueden serlo. De hecho, como

$$|\langle \alpha, k | \beta, k \rangle| = |L_k(|\beta - \alpha|^2)| e^{\frac{1}{2}|\alpha - \beta|^2},$$

si se fija α , el lugar geométrico de las $\beta \in \mathbb{C}$ tales que $|\beta, k\rangle$ es ortogonal a $|\alpha, k\rangle$ describe k círculos con centro en 0. Mostramos en la figura 3.2 la gráfica de un ejemplo representativo de este producto interno, con $k = 10$.

Los productos internos más complicados, de la forma $\langle \alpha, k | \beta, l \rangle$, son también de interés. Sin embargo, para evitar un exceso de álgebra innecesaria, realizamos los cálculos en el apéndice A y damos únicamente el resultado, (A.2):

$$\langle \alpha, k | \beta, l \rangle = \sqrt{\frac{l!}{k!}} (\beta - \alpha)^{k-l} L_l^{(k-l)}(|\beta - \alpha|^2) \langle \alpha | \beta \rangle, \text{ para } k \geq l. \quad (\text{A.2})$$

Un ejemplo típico se muestra en la figura 3.3, que grafica el módulo de dicho producto interno. La fase, en cambio, se muestra en la figura 3.4, donde se observan tres contribuciones principales. La primera es debida al factor $(\beta - \alpha)^{k-l}$, y es responsable del comportamiento cerca del origen; la segunda se debe a los cambios de signo de $L_l^{(k-l)}(|\beta - \alpha|^2)$ en sus ceros, y genera los cambios abruptos de fase en los anillos que definen dichos ceros.

Finalmente, el factor $e^{i \operatorname{Im}(\alpha^* \beta)} = e^{i \operatorname{Im}(\alpha^*(\beta - \alpha))}$ del producto interno $\langle \alpha | \beta \rangle$ causa el comportamiento lejos del cero. En particular, si se fija α entonces la fase del producto interno es función de $\beta - \alpha$ más que de β , en el sentido de que todo el comportamiento interesante se encuentra cuando $\beta - \alpha$ es pequeña, y no β .

Ahora bien, como existe esta dependencia en dos parámetros, sí cambia el comportamiento de esta fase según la relación de α con k y l . El caso graficado es más bien intermedio: para α mayor, el comportamiento en “bandas” atraviesa los anillos y la transición al comportamiento en rayos desde el origen ocurre dentro del primer cero, mientras que para α menor dicha transición ocurre fuera de los anillos, en los cuales domina el comportamiento centrado en el origen de $(\beta - \alpha)^{k-l}$. Esto se debe a que el espaciamiento de las bandas lo controla el factor de α^* en $e^{i \operatorname{Im}(\alpha^*(\beta - \alpha))}$.

3.6. Estados de número desplazados

Recordamos ahora al lector la definición de los estados coherentes generalizados, (3.20):

$$|\alpha, k\rangle := \frac{1}{\sqrt{k!}} \left(\hat{a}^\dagger - \alpha^* \right)^k |\alpha\rangle.$$

En particular, es notable su parecido a la acción de \hat{a}^\dagger sobre la base de número, (3.10), dada por

$$|n\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger n}{\sqrt{n!}} |0\rangle.$$

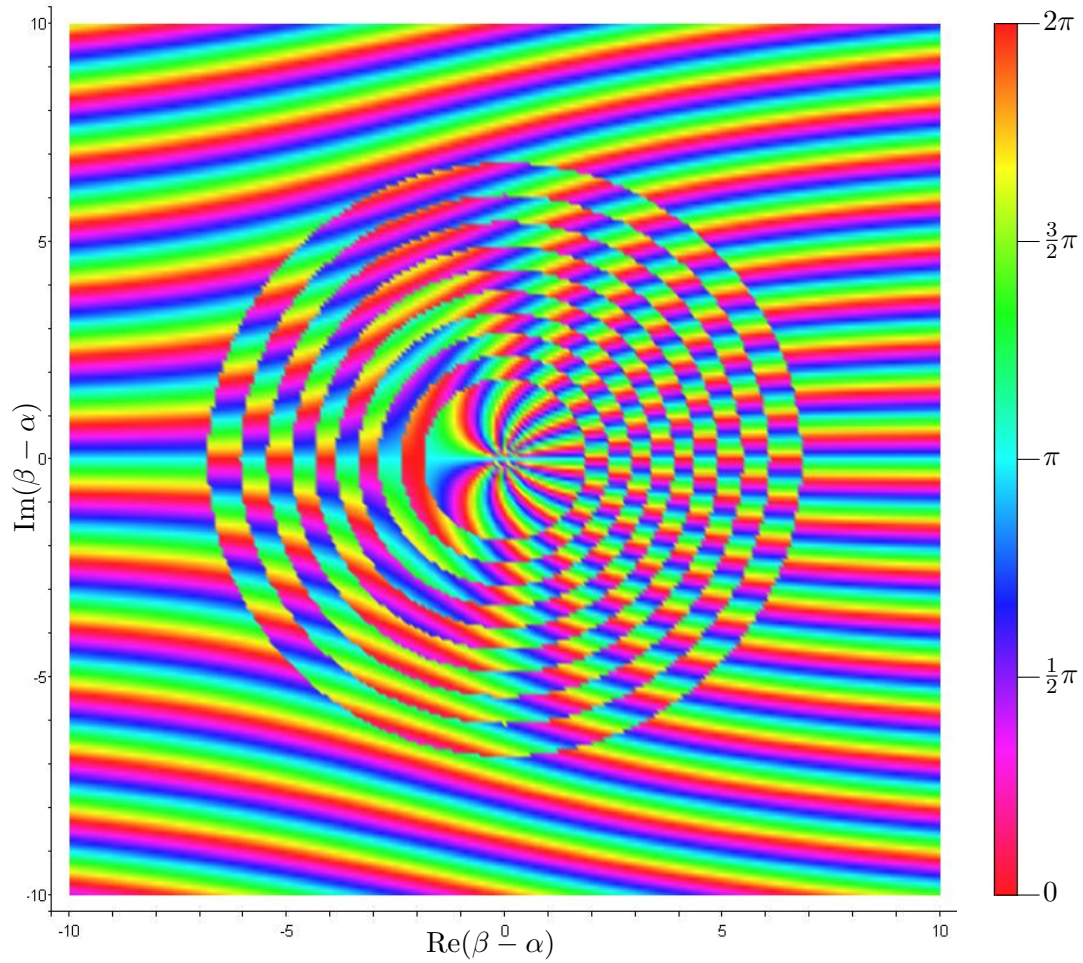


Figura 3.4: Argumento del producto interno de estados coherentes generalizados de distintas capas: $\arg(\langle \alpha, 20 | \beta, 10 \rangle)$ con valores entre 0 y 2π indicados por la escala de colores, en función de $\beta - \alpha$ cuando se fija $\alpha = 5$. Los cambios abruptos de fase en los anillos se deben al cambio de signo de $L_l^{(k-l)}(|\beta - \alpha|^2)$ en cada cero.

Dicho parecido es importante, y puede hacerse preciso invocando al llamado *operador de desplazamiento*,

$$\hat{D}(\alpha) := e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}. \quad (3.34)$$

Puede demostrarse [21, pp 48-50] que este operador es unitario y tal que $\hat{D}(\alpha)^{-1} = \hat{D}(\alpha)^\dagger = \hat{D}(-\alpha)$, y que mediante la fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff puede expresarse como

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}} = e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha^*\hat{a}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger}.$$

Paréntesis matemático 3.3. Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff

La fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff vale para operadores A y B tales que su conmutador $[A, B]$ conmuta tanto con A como con B , y establece que

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^A e^B. \quad (3.35)$$

Ofrecemos aquí una demostración basada en [11, pp. 319-320], que empieza con un lema técnico, en el cual dejamos de lado las cuestiones de convergencia de la serie,

Lema 1. *Para cualesquiera operadores $A, B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ se tiene*

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots$$

cuando ambos lados están definidos.

Demostración.

El truco es considerar la serie de Taylor de la función

$$f(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A},$$

alrededor de $\lambda = 0$. Para ello hay que calcular

- $f(0) = B,$
- $f'(\lambda) = A e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} A = A f(\lambda) - f(\lambda) A = [A, f(\lambda)]$
 $\Rightarrow f'(0) = [A, B],$
- $f''(\lambda) = [A, f'(\lambda)] \Rightarrow f''(0) = [A, [A, B]],$
- \vdots
- $f^{(n)}(\lambda) = [A, f^{(n-1)}(\lambda)] \Rightarrow f^{(n)}(0) = [A, \dots, [A, [A, B]] \dots],$
- \vdots

con la cual

$$f(\lambda) = B + \lambda[A, B] + \frac{1}{2!}\lambda^2[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}\lambda^3[A, [A, [A, B]]] + \dots$$

que demuestra el lema cuando $\lambda = 1$. ■

Si $[A, B]$ conmuta con A y con B , entonces todos los términos de la serie salvo por los primeros se anulan, y la serie ciertamente converge, a

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = B + \lambda[A, B].$$

Consideramos ahora la función $F(\lambda) = e^{\lambda A} e^{\lambda B}$, cuya derivada es

$$\begin{aligned} F'(\lambda) &= A e^{\lambda A} e^{\lambda B} + e^{\lambda A} B e^{\lambda B} = (A + e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}) e^{\lambda A} e^{\lambda B} \\ &= (A + e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}) F(\lambda) = (A + B + \lambda[A, B]) F(\lambda). \end{aligned}$$

Ésta es una ecuación diferencial en $F(\lambda)$ cuya solución con $F(0) = 1$ es

$$F(\lambda) = e^{\lambda(A+B) + \frac{1}{2}\lambda^2[A, B]},$$

lo cual da para $\lambda = 1$ que

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A, B]} = e^{\frac{1}{2}[A, B]} e^{A+B},$$

pues $[A, B]$ conmuta con $A + B$.

De la expresión anterior se obtiene el conmutador $[\hat{a}, \hat{D}(\alpha)] = \alpha \hat{D}(\alpha)$, mismo que puede escribirse de la forma

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha) \hat{a} &= \hat{a} \hat{D}(\alpha) - \alpha \hat{D}(\alpha) = (\hat{a} - \alpha) \hat{D}(\alpha) \\ \Rightarrow \hat{a}^\dagger \hat{D}(-\alpha) &= \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha)^\dagger = \hat{D}(\alpha)^\dagger (\hat{a}^\dagger - \alpha^*) = \hat{D}(-\alpha) (\hat{a}^\dagger - \alpha^*) \\ &\Rightarrow \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) = \hat{D}(\alpha) \hat{a}^\dagger + \hat{D}(\alpha) \alpha^* \quad (\text{cambiando } \alpha \text{ por } -\alpha) \\ \Rightarrow (\hat{a}^\dagger - \alpha^*) \hat{D}(\alpha) &= \hat{D}(\alpha) \hat{a}^\dagger, \end{aligned}$$

que finalmente puede expresarse en la forma que nos será útil,

$$(\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^k \hat{D}(\alpha) = \hat{D}(\alpha) \hat{a}^{\dagger k}. \quad (3.36)$$

Esta forma es relevante ya que los estados coherentes pueden ser expresados como la acción del operador de desplazamiento sobre el vacío. Es decir, como $\hat{a} |0\rangle = 0$, se

tiene $e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle = |0\rangle$, con lo cual

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha) |0\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = |\alpha\rangle, \end{aligned}$$

por las ecuaciones (3.10) y (3.11); este resultado es en buena medida la motivación de la definición del operador de desplazamiento, que se define de esa forma para ser un operador unitario con esta acción sobre el vacío. Para nuestros propósitos, este resultado puede ser utilizado para calcular una nueva expresión para los estados coherentes generalizados,

$$\begin{aligned} |\alpha, k\rangle &= \frac{1}{\sqrt{k!}} (\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^k |\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{k!}} (\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^k \hat{D}(\alpha) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{k!}} \hat{D}(\alpha) \hat{a}^{\dagger k} |0\rangle \\ &= \hat{D}(\alpha) |k\rangle, \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde $|k\rangle$ es el estado de número k , con $\hat{n} |k\rangle = k |k\rangle$. Es decir, los estados coherentes generalizados también pueden verse como los estados de número desplazados.

Este resultado es importante por sí solo, pero además permite encontrar una nueva relación de completéz: para cada α fija,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha, k\rangle \langle \alpha, k| &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{D}(\alpha) |k\rangle \langle k| \hat{D}(\alpha)^\dagger = \hat{D}(\alpha) \left(\sum_{k=0}^{\infty} |k\rangle \langle k| \right) \hat{D}(\alpha)^\dagger = \hat{D}(\alpha) \hat{D}(\alpha)^\dagger \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Más aún, como los distintos estados coherentes generalizados correspondientes a un mismo valor propio α sí son ortogonales, con $\langle \alpha, k | \alpha, l \rangle = \delta_{kl}$, se obtiene que para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ el conjunto $\{|\alpha, k\rangle : k = 0, 1, 2, \dots\}$ es una base ortonormal para \mathcal{H} .

Otra aplicación es una generalización particularmente interesante de la relación de completéz (3.24). Sean $|\psi\rangle, |\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ dos estados arbitrarios. Entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \hat{D}(\alpha) |\psi\rangle \langle \varphi| \hat{D}(\alpha)^\dagger &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \hat{D}(\alpha) \left(\sum_{k=0}^{\infty} |k\rangle \langle k| \right) |\psi\rangle \langle \varphi| \left(\sum_{l=0}^{\infty} |l\rangle \langle l| \right) \hat{D}(\alpha)^\dagger \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \hat{D}(\alpha) |k\rangle \langle k| \psi\rangle \langle \varphi| l\rangle \langle l| \hat{D}(\alpha)^\dagger \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \langle k| \psi\rangle \langle \varphi| l\rangle \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k\rangle \langle \alpha, l| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \langle \varphi| l\rangle \langle k| \psi\rangle \delta_{kl} = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \varphi| k\rangle \langle k| \psi\rangle = \langle \varphi| \psi\rangle. \end{aligned} \quad (3.39)$$

En particular, si $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ es un estado normalizado a $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, entonces

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} \hat{D}(\alpha) |\psi\rangle \langle\psi| \hat{D}(\alpha)^\dagger = 1. \quad (3.40)$$

Es decir, la relación (3.39) permite obtener, a partir de un *único* estado arbitrario, y mediante el operador de desplazamiento, un conjunto completo de estados. Más aún, esto puede extenderse [2] para obtener una descomposición de la unidad a partir de un operador de densidad $\hat{\rho} = \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle\psi_j|$ arbitrario (sujeto, por supuesto, a que $\sum_j p_j = 1$ y $p_j \geq 0$ para toda j), para el cual claramente

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} \hat{D}(\alpha) \hat{\rho} \hat{D}(\alpha)^\dagger = 1. \quad (3.41)$$

3.7. Evolución temporal y energía

Como parte final de nuestro análisis de los estados coherentes generalizados, o estados de número desplazados, nos dedicamos a su relación con el hamiltoniano de oscilador armónico $\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega (\hat{\pi}^2 + \hat{\xi}^2) = \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})$, en particular en lo que respecta a su evolución temporal y a su energía promedio.

En particular, nos interesa resolver la ecuación de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle,$$

bajo la condición inicial $|\psi(0)\rangle = |\alpha, k\rangle$ para algunos $\alpha \in \mathbb{C}$ y $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ fijos. Para atacar este problema, la herramienta más evidente es la base de número; sin embargo, esto puede evitarse en gran medida mediante el uso del operador de evolución temporal $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} = e^{-i(\hat{n} + \frac{1}{2})\omega t}$.⁵ Así,

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle = e^{-i(\hat{n} + \frac{1}{2})\omega t} |\alpha, k\rangle = e^{-\frac{i}{2}\omega t} e^{-i\hat{n}\omega t} \frac{(\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^k}{\sqrt{k!}} |\alpha\rangle.$$

Para evaluar esta expresión, utilizamos el hecho de que $\hat{n}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger(\hat{n} + 1)$, que implica que para cualquier función f se tiene $f(\hat{n})\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger f(\hat{n} + 1)$; en particular, para $f(n) = e^{-in\omega t}$ se obtiene $e^{-i\hat{n}\omega t} \hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger e^{-i(\hat{n}+1)\omega t} = \hat{a}^\dagger e^{-i\omega t} e^{-i\hat{n}\omega t}$. De ahí se obtiene, a su vez, que para cualquier función⁶ g se cumple que $e^{-i\hat{n}\omega t} g(\hat{a}^\dagger) = g(\hat{a}^\dagger e^{-i\omega t}) e^{-i\hat{n}\omega t}$.

Entonces, escribiendo a los estados de número desplazados $|\alpha, k\rangle$ como

$$|\alpha, k\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^k}{\sqrt{k!}} e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle = g_\alpha(\hat{a}^\dagger) |0\rangle,$$

⁵Este método se debe a una sugerencia del Dr. Octavio Castaños.

⁶Aquí se supone que tanto f como g cuentan con series de Taylor, que se utilizan para definir su acción sobre operadores.

se obtiene a

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{2}\omega t} e^{-i\hat{n}\omega t} g_\alpha(\hat{a}^\dagger) |0\rangle = e^{-\frac{i}{2}\omega t} g_\alpha(\hat{a}^\dagger e^{-i\omega t}) e^{-i\hat{n}\omega t} |0\rangle \\
&= e^{-\frac{i}{2}\omega t} \frac{(\hat{a}^\dagger e^{-i\omega t} - \alpha^*)^k}{\sqrt{k!}} e^{-|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger e^{-i\omega t}} |0\rangle \\
&= e^{-\frac{i}{2}\omega t} e^{-ik\omega t} \frac{(\hat{a}^\dagger - (\alpha e^{-i\omega t})^*)^k}{\sqrt{k!}} e^{-|\alpha e^{-i\omega t}|^2} e^{\alpha e^{-i\omega t} \hat{a}^\dagger} |0\rangle,
\end{aligned}$$

que se puede escribir como

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i(k+\frac{1}{2})\omega t} |\alpha e^{-i\omega t}, k\rangle. \quad (3.42)$$

En particular, es notable de este resultado que los estados coherentes generalizados evolucionan temporalmente dentro de una misma “capa”, es decir, con k constante. El resultado para los estados coherentes, $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{2}\omega t} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle$, es bien conocido [21, pp. 50-52], y su generalización a (3.42) es bastante transparente.

Adicionalmente a lo anterior, pueden calcularse rápidamente el número promedio de fotones,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, k | \hat{n} | \alpha, k \rangle &= \langle \alpha, k | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha, k \rangle = \|\hat{a} | \alpha, k \rangle\|^2 = \|\alpha | \alpha, k \rangle + \sqrt{k} | \alpha, k-1 \rangle\|^2 \\
&= |\alpha|^2 + k,
\end{aligned}$$

así como su dispersión,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, k | (\Delta \hat{n})^2 | \alpha, k \rangle &= \langle \alpha, k | \hat{n}^2 | \alpha, k \rangle - \langle \alpha, k | \hat{n} | \alpha, k \rangle^2 \\
&= \langle \alpha, k | \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha, k \rangle - \langle \alpha, k | \hat{n} | \alpha, k \rangle^2 \\
&= \langle \alpha, k | \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha, k \rangle - \langle \alpha, k | \hat{n} | \alpha, k \rangle^2 \\
&= \|\hat{a}^2 | \alpha, k \rangle\|^2 + |\alpha|^2 + k - (|\alpha|^2 + k)^2 \\
&= \|\alpha^2 | \alpha, k \rangle + 2\alpha\sqrt{k} | \alpha, k-1 \rangle + \sqrt{k}\sqrt{k-1} | \alpha, k-2 \rangle\|^2 \\
&\quad + |\alpha|^2 + k - (|\alpha|^2 + k)^2 \\
&= |\alpha|^4 + 4|\alpha|^2 k + k(k-1) + |\alpha|^2 + k - |\alpha|^4 - 2|\alpha|^2 k - k^2 \\
&= |\alpha|^2 + 2|\alpha|^2 k = |\alpha|^2 (2k+1).
\end{aligned}$$

De ellos se obtienen inmediatamente la energía promedio, dada por $\langle \alpha, k | \hat{H} | \alpha, k \rangle = \hbar\omega (|\alpha|^2 + k + \frac{1}{2})$, y su dispersión, $\langle \alpha, k | (\Delta \hat{H})^2 | \alpha, k \rangle = \hbar^2 \omega^2 |\alpha|^2 (2k+1)$, con lo cual $\Delta E = \hbar\omega |\alpha| \sqrt{2k+1}$. Con esto puede verse que la estadística de los estados $|\alpha, k\rangle$ siempre es estrictamente subpoissoniana, pero esto sólo es significativo para $|\alpha| \ll \sqrt{k}$.

Cerramos este capítulo relacionando los resultados hasta ahora obtenidos con los conocidos en la literatura. El foco de esta sección, el hecho de que la evolución temporal preserva la forma de la función de onda y sigue a un centroide con trayectoria clásica, se conoce desde los años 50, cuando Senitzky [51] y Plebański [43, 44, 45], buscando estados con exactamente esa propiedad, encontraron a los vectores $|\alpha, k\rangle$ como las únicas soluciones.⁷

Dicho trabajo parece haber sido ignorado durante bastante tiempo, y nuestros estados coherentes generalizados no vuelven a aparecer de manera significativa hasta el trabajo de Boiteux y Levelut en 1973 [6], quienes generalizan los resultados de Glauber [22] de estados coherentes y encuentran, en particular, la relación de completez (3.24) para $k = l$.

Igualmente, la relación (3.24) y sus generalizaciones a (3.40) y (3.39) se encuentran naturalmente en la teoría general de los estados coherentes [28, 42], íntimamente relacionada a la teoría de grupos y representaciones, pero puede ser demostrada independientemente [2].

El producto interno $\langle \alpha, k | \beta, l \rangle$, en cambio, es estudiado por Venkata Satyanarayana [48] en la forma restringida, pero equivalente, con $\alpha = 0$. Ahí se utiliza el cálculo de Cahill y Glauber [7] del elemento de matriz $\langle m | \hat{D}(\alpha) | n \rangle$, en el cual aparecen naturalmente los polinomios asociados de Laguerre a través de su función generadora,

$$(1 + y)^m e^{-xy} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(m-n)}(x) y^n,$$

misma que aparece, con $y = \alpha/\beta$ y $x = |\beta|^2$, en el elemento de matriz

$$\langle m | \hat{D}(\beta) | \alpha \rangle = \langle m | e^{\frac{1}{2}(\beta\alpha^* - \beta^*\alpha)} | \beta + \alpha \rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}} (\beta + \alpha)^m e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2 - \frac{1}{2}|\alpha|^2 - \beta^*\alpha}.$$

Ese producto interno restringido a $\alpha = 0$, es decir, $\langle n | \alpha, k \rangle$, fue estudiado igualmente por Knight *et al.* [12], donde el énfasis está en *fixar* $|\alpha, k\rangle$ y hacer variar n . Ahí demuestran que el módulo cuadrado de dicho producto interno, igual a la distribución de número de fotones, muestra oscilaciones al variar n , exactamente análogas a las del efecto Franck-Condon de espectroscopía molecular, lo cual atribuyen a interferencia en el espacio fase.

Los estados coherentes generalizados $|\alpha, k\rangle$ de este texto empiezan a ser objeto de interés por sus propiedades físicas con el trabajo de Král [29, 30], Roy y Virendra Singh [47], Knight *et al.* [12, 25], Wünsche [60], y Venkata Satyanarayana [48]. En particular, interesaban como el resultado probable de forzar clásicamente (es decir, con una corriente oscilante) un campo electromagnético en un estado de número, y pronto se volvieron un objeto de estudio interesante por derecho propio en la literatura,

⁷Si se buscan, en cambio, estados de *dispersión* fija alrededor de centroides con movimiento clásico, entonces las soluciones son más generales e incluyen, por ejemplo, a estados tan sencillos como $|\alpha \perp \beta\rangle = [1 - |\langle \beta | \alpha \rangle|^2]^{-1/2} (|\alpha\rangle - \langle \beta | \alpha \rangle |\beta\rangle)$ [16, 34].

donde se les conoce usualmente como estados de número desplazados y, ocasionalmente, *estados semicoherentes* [6, 34].

Además de las propiedades analíticas ya discutidas – de las cuales la resolución del operador de aniquilación en bloques de Jordan infinitos, en particular, parece no aparecer explícitamente en la literatura – los estados de número desplazados son particularmente útiles para trabajar con las cuasiprobabilidades en óptica cuántica (a saber, la función P de Sudarshan, la función de Wigner y la función Q de Husimi), las cuales adquieren formas particularmente simples y nuevas generalizaciones.

Dos ejemplos de esto son la función de Wigner, que admite la representación en serie [39]

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \langle \alpha, k | \hat{\rho} | \alpha, k \rangle,$$

y la función P de Sudarshan, que se generaliza a funciones [47]

$$p_k(\alpha) = \text{P} \int \frac{d^2\beta}{\pi} \frac{\text{Tr}(\hat{\rho} \hat{D}(\beta)^\dagger)}{L_k(|\beta|^2)} e^{\frac{1}{2}|\beta|^2 + \beta\alpha^* - \beta^*\alpha}$$

tales que

$$\hat{\rho} = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} p_k(\alpha) |\alpha, k\rangle \langle \alpha, k|$$

para cualquier operador de densidad $\hat{\rho}$. (Es decir, los estados $|\alpha, k\rangle$ resuelven diagonalmente a cualquier operador de densidad $\hat{\rho}$; de hecho, cualquier operador \hat{G} admite tal representación diagonal siempre que $\text{Tr}(\hat{G}\hat{G}^\dagger) < \infty$.)

Las propiedades físicas de los estados de número desplazados $|\alpha, k\rangle$ son igualmente ricas e interesantes. Particularmente, han sido utilizados con gran éxito para estudiar el modelo de Jaynes-Cummings cuando el campo está en un estado coherente (como el generado por el láser de bombeo) y el componente atómico está en un estado excitado, situación en la cual el sistema tiende a oscilar entre el estado inicial y el estado con el componente atómico desexcitado y el campo en un estado de número desplazado [13, 17, 18, 40].

Otras aplicaciones, como a circuitos RLC mesoscópicos [59], también han sido estudiadas, y los estados de número desplazados $|\alpha, k\rangle$ son actualmente foco de investigación tanto teórica [10] como práctica y orientada a su implementación en experimentos [32].

Capítulo 4

Número finito de fotones

En este capítulo estudiaremos las restricciones de los operadores del campo electromagnético como oscilador armónico – en particular, los operadores de creación, aniquilación, número y, sobre todo, posición – cuando se toma un espacio estado que contiene únicamente un número finito de fotones.

Esto puede verse como la restricción a estados con energía acotada, es decir, subespacios en los cuales el hamiltoniano $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{n} + 1/2)$ tiene valores propios acotados. En particular, consideramos los espacios de Hilbert $\mathcal{H}^N = \text{span}\{|0\rangle, \dots, |N\rangle\} \subseteq \mathcal{H}$. Tomamos a la acción de los operadores en \mathcal{H}^N como la misma que en \mathcal{H} , ignorando contribuciones de vectores de número $|n\rangle$ con $n > N$.¹

Así, $\hat{a}_N |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$ y $\hat{a}_N^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$, mientras que $\hat{n}_N = \hat{a}_N^\dagger \hat{a}_N$, $\hat{\xi}_N = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_N + \hat{a}_N^\dagger)$, y $\hat{\pi}_N = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\hat{a}_N - \hat{a}_N^\dagger)$.

Aquí hay un punto técnico que no es evidente, pero sí es importante: los operadores de creación y aniquilación restringidos siguen siendo adjuntos uno del otro, lo que puede expresarse como $\hat{a}_N^\dagger = \hat{a}_N^\dagger$. Esto es crucial para que las cuadraturas $\hat{\xi}$ y $\hat{\pi}$ sigan siendo autoadjuntas, y se debe a que si $\Pi_N : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^N$ es la proyección ortogonal sobre \mathcal{H}^N , entonces $\Pi_N^\dagger = \Pi_N$ y $\hat{a}_N = \Pi_N \hat{a} \Pi_N$, por lo cual $\hat{a}_N^\dagger = \Pi_N \hat{a}^\dagger \Pi_N$.

Esto asegura que las cuadraturas son autoadjuntas, de modo que serán diagonalizables *dentro de* \mathcal{H}^N . Nos dedicamos ahora a estudiar su espectro.

4.1. Primera cuadratura

Dejamos por el momento a la cuadratura de momento, $\hat{\pi}_N$, de lado, pues veremos luego que es equivalente a la de posición. Los polinomios característicos de ésta pueden calcularse de manera fácil, por lo menos para N pequeña:

$$\blacksquare \det(\hat{\xi}_0 - \lambda) = \det\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0) - \lambda\right) = -\lambda,$$

¹Técnicamente, dado un operador $\hat{O} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, definimos su restricción al espacio con N fotones como $\hat{O}_N : \mathcal{H}^N \rightarrow \mathcal{H}^N$, la restricción de \hat{O} a \mathcal{H}^N seguida de la proyección ortogonal sobre el mismo.

- $\det(\hat{\xi}_1 - \lambda) = \det\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda\right) = \lambda^2 - \frac{1}{2},$
- $\det(\hat{\xi}_2 - \lambda) = \det\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} - \lambda\right) = -\lambda(\lambda^2 - \frac{3}{2}),$
- $\det(\hat{\xi}_3 - \lambda) = \det\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} - \lambda\right) = \lambda^4 - 3\lambda^2 + \frac{3}{4},$

y así, obteniéndose polinomios con coeficientes racionales siempre. Aquí, de nuevo, nos enfrentamos a una familia de polinomios de grado ascendente, y de nuevo son polinomios conocidos: puede verse de cualquier libro de funciones especiales (aunque con esta normalización no es inmediatamente evidente) que estos son los polinomios de Hermite², o por lo menos los primeros de ellos. En particular, para estos casos se tiene que

$$\det(\hat{\xi}_N - \lambda) = \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1}} H_{N+1}(\lambda), \quad (4.1)$$

donde se define $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$.

Esta relación es bastante más fácil de demostrar que con los polinomios de Laguerre del capítulo anterior. Para ver que se cumple para toda N basta encontrar una relación de recurrencia para los polinomios $2^{N+1} \det(\hat{\xi}_N - \lambda)$, expandiendo el determinante por menores sobre el último renglón y luego sobre la última columna:

$$\begin{aligned} 2^{N+1} \det(\hat{\xi}_N - \lambda) &= 2^{N+1} \det \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{N} & 0 \end{pmatrix} - \lambda \right) \\ &= 2^{\frac{N+1}{2}} \det \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2}\lambda & \sqrt{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\sqrt{2}\lambda & \sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{N} & -\sqrt{2}\lambda \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

²De nuevo, utilizamos la normalización y los resultados de [1].

con lo cual

$$\begin{aligned}
2^{N+1} \det(\hat{\xi}_N - \lambda) &= -2^{N/2} 2\lambda \det \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2}\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\sqrt{2}\lambda & \sqrt{N-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{N-1} & -\sqrt{2}\lambda \end{pmatrix} \\
&= -2^{\frac{N+1}{2}} \sqrt{N} \det \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2}\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\sqrt{2}\lambda & \sqrt{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{N-2} & -\sqrt{2}\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{N-1} & \sqrt{N} \end{pmatrix} \\
&= -2\lambda 2^N \det(\hat{\xi}_{N-1} - \lambda) - 2^{\frac{N+1}{2}} N \det \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\sqrt{2}\lambda & \sqrt{N-2} \\ 0 & \cdots & \sqrt{N-2} & -\sqrt{2}\lambda \end{pmatrix} \\
&= -2\lambda \cdot 2^N \det(\hat{\xi}_{N-1} - \lambda) - 2N \cdot 2^{N-1} \det(\hat{\xi}_{N-2} - \lambda).
\end{aligned}$$

Esto demuestra que los polinomios $(-2)^{N+1} \det(\hat{\xi}_N - \lambda)$ cumplen la misma relación de recurrencia que los polinomios de Hermite,

$$H_{N+1}(x) = 2xH_N(x) - 2NH_{N-1}(x). \quad (4.2)$$

Como coinciden al inicio de la sucesión, deben coincidir para toda N ; esto demuestra la hipótesis (4.1).

Se obtiene así una representación particularmente curiosa de los polinomios de Hermite, en términos de un determinante particularmente importante de la teoría del oscilador armónico,

$$H_N(x) = \det \left(\sqrt{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2}x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2}x & \sqrt{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2}x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{2}x & \sqrt{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{N-1} & \sqrt{2}x \end{pmatrix} \right) \quad (4.3a)$$

$$= 2^{N-1} \det(\hat{\xi}_{N-1} + x). \quad (4.3b)$$

Estos resultados tienen implicaciones importantes para el espectro de una cuadratura finita como $\hat{\xi}_N$, que consta exactamente de los ceros del $(N+1)$ -ésimo polinomio

de Hermite, H_{N+1} . Esto es, en principio, una mala noticia: pueden encontrarse fórmulas exactas para los ceros de los primeros polinomios – incluso hasta H_7 – pero no hay fórmulas exactas generales para los ceros de ahí en adelante.

Por ello, el problema de la diagonalización de $\hat{\xi}_N$ pudiera parecer insoluble: si no se conocen los valores propios, encontrar los vectores propios parece poco menos que imposible. Se conocen muchos resultados aproximados sobre los ceros en cuestión, pero una aproximación para el valor propio – por buena que sea – sólo puede dar un vector propio aproximado. Más aún, si se utiliza un valor propio aproximado en un intento numérico de encontrar el vector propio, el error de la aproximación en el vector será difícil de cuantificar.

Sin embargo, como veremos a continuación, el problema sí tiene una solución bastante completa: pueden obtenerse fórmulas explícitas para los vectores propios en términos de los valores propios, que requieren una aproximación numérica al valor propio únicamente si se requiere lo mismo para el vector propio, en cuyo caso la calidad de aproximación es fácil de estimar. Esto se debe a que, aunque no se conocen fórmulas cerradas para los ceros, sí se conocen muchos resultados sobre los polinomios que los describen, así como sobre su número y distribución.

Antes de comenzar, conviene cambiar la normalización de los polinomios de Hermite a la utilizada en estadística, $\text{He}_n(x) := (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$, que se relaciona a la mencionada arriba mediante $\text{He}_n(x) = 2^{-n/2} H_n(x/\sqrt{2})$, o alternativamente $H_n(x) = 2^{n/2} \text{He}_n(\sqrt{2}x)$. En particular, los polinomios He_N tienen coeficiente principal 1, y cumplen con la relación de recurrencia

$$\text{He}_{n+1}(x) = x \text{He}_n(x) - n \text{He}_{n-1}(x). \quad (4.4)$$

Con esta normalización, se tiene

$$\det(\sqrt{2}\hat{\xi}_N + \lambda) = \text{He}_{N+1}(\lambda);$$

Análogamente, para simplificar las cuentas, en vez de buscar diagonalizar a $\hat{\xi}_N$, lo haremos con $-\sqrt{2}\hat{\xi}_N$. Es decir, buscamos vectores $|v\rangle \in \mathcal{H}^N$ tales que $(\sqrt{2}\hat{\xi}_N + \lambda)|v\rangle = 0$.

Escribiendo $|v\rangle = \sum_{n=0}^N v_n |n\rangle$, este problema se escribe

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \sqrt{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & \sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{N} & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-1} \\ v_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Ahora llevamos a la matriz a una forma triangular. Empezamos multiplicando el segundo renglón por λ ,³ restándole el primero, y luego multiplicando el tercer renglón por $\lambda^2 - 1$ y restándole $\sqrt{2}$ veces el segundo:

³En este paso, y los siguientes, se multiplican renglones completos de la matriz por cantidades que podrían ser cero (y en algunos casos llegan a serlo). Sin embargo, el problema puede ignorarse, ya

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \sqrt{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & \sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{N} & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 1 & \sqrt{2}\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & \sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{N} & \lambda \end{pmatrix} \\
& \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 1 & \sqrt{2}\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda^2 - 3) & \sqrt{3}(\lambda^2 - 1) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & \sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{N} & \lambda \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aquí se reconocen a los elementos diagonales ya obtenidos como los primeros polinomios de Hermite, en su nueva normalización: $\text{He}_1(\lambda) = \lambda$, $\text{He}_2(\lambda) = \lambda^2 - 1$, $\text{He}_3(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 3)$, etc. Análogamente, los elementos fuera de la diagonal son también polinomios de Hermite: en el k -ésimo renglón y $(k + 1)$ -ésima columna, donde $0 \leq k \leq N - 1$, aparece $\sqrt{k + 1} \text{He}_k(\lambda)$.

Queda entonces claro que este procedimiento puede extenderse a toda la matriz: si se ha efectuado el procedimiento de arriba para los primeros $k - 1$ renglones, se tendrá entonces una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \text{He}_{k+1}(\lambda) & \sqrt{k+1} \text{He}_k(\lambda) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{k+1} & \lambda & \sqrt{k+2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Aquí se multiplica el renglón inferior por $\text{He}_{k+1}(\lambda)$ y se le resta $\sqrt{k + 1}$ veces el superior, para obtener cero en la entrada que tiene $\sqrt{k + 1}$. La entrada que tiene $\sqrt{k + 2}$ cambia entonces a $\sqrt{k + 2} \text{He}_{k+1}(\lambda)$, mientras que la entrada diagonal cambia de λ a

$$\lambda \text{He}_{k+1}(\lambda) - (k + 1) \text{He}_k(\lambda) = \text{He}_{k+2}(\lambda),$$

debido a la relación de recurrencia (4.4).

Esto implica que, por inducción sobre k , el sistema puede transformarse completo a una forma triangular superior, con elementos de la forma $\text{He}_k(\lambda)$ en la diagonal

que dichos pasos son necesarios únicamente como “muletas” para construir la solución. Al obtener la solución final, puede demostrarse que lo es sin importar que se haya multiplicado por cero.

principal y $\sqrt{k} \text{He}_{k+1}(\lambda)$ en la subdiagonal superior. En particular, se tiene

$$\begin{pmatrix} \text{He}_1(\lambda) & \text{He}_0(\lambda) & 0 & & 0 \\ 0 & \text{He}_2(\lambda) & \sqrt{2} \text{He}_1(\lambda) & 0 & \\ & 0 & \text{He}_3(\lambda) & \sqrt{3} \text{He}_2(\lambda) & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & 0 & \text{He}_N(\lambda) & \sqrt{N} \text{He}_{N-1}(\lambda) \\ & & & 0 & \text{He}_{N+1}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-1} \\ v_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema es claramente singular (y por ello tiene soluciones no triviales) cuando $\text{He}_{N+1}(\lambda) = 0$, como debe de ser ya que esos son precisamente los valores propios buscados. Sin embargo, también es singular cuando $\text{He}_k(\lambda) = 0$ para cualquier $k = 1, 2, \dots, N$, lo cual es un artificio y agrega soluciones falsas, por lo que cualquier candidato a solución debe ser cotejado con el sistema original.

Ya en su forma triangular superior, el sistema es fácil de resolver. La primera ecuación,

$$\text{He}_1(\lambda)v_0 + \text{He}_0(\lambda)v_1 = \lambda v_0 + v_1 = 0,$$

implica simplemente que $v_1 = -\text{He}_1(\lambda)v_0 = -\lambda v_0$. Análogamente, la segunda ecuación implica que $v_2 = -\text{He}_2(\lambda)v_1/\sqrt{2} \text{He}_1(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{He}_2(\lambda)v_0$, mientras que de la tercera se obtiene $v_3 = -\text{He}_3(\lambda)v_2/\sqrt{3} \text{He}_2(\lambda) = -\frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2}} \text{He}_3(\lambda)v_0$.

De aquí se obtiene el patrón general:

$$v_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k!}} \text{He}_k(\lambda)v_0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N. \quad (4.6)$$

Aquí v_0 es una constante arbitraria que puede escogerse para asegurar la normalización. El vector v no se anula salvo que v_0 lo haga, y cumple idénticamente las primeras N ecuaciones sin importar el valor de λ . Esto se cumple tanto para el sistema transformado como para el original, gracias a la relación de recurrencia (4.4). Por ello, puede calcularse que

$$\begin{aligned} (\sqrt{2}\hat{\xi}_N + \lambda) |v\rangle &= (\sqrt{N}v_{N-1} + \lambda v_N) |N\rangle \\ &= \left(\sqrt{N} \frac{(-1)^{N-1}}{\sqrt{(N-1)!}} \text{He}_{N-1}(\lambda) + \lambda \frac{(-1)^N}{\sqrt{N!}} \text{He}_N(\lambda) \right) v_0 |N\rangle \\ &= \frac{(-1)^N}{\sqrt{N!}} (\lambda \text{He}_N(\lambda) - N \text{He}_{N-1}(\lambda)) v_0 |N\rangle \\ &= \frac{(-1)^N}{\sqrt{N!}} \text{He}_{N+1}(\lambda) v_0 |N\rangle, \end{aligned}$$

de nuevo sin importar el valor de λ . Cuando λ es un cero de He_{N+1} – de los cuales hay $N+1$, tantos como la dimensión de \mathcal{H}^N – se obtiene un vector propio de $\hat{\xi}_N$, con valor propio $-\lambda/\sqrt{2}$, lo cual resuelve el problema de diagonalizar $\hat{\xi}_N$.

4.2. Espectro puntual de la primera cuadratura

Ahora bien, esta solución al problema de diagonalizar $\hat{\xi}_N$ puede llevarse bastante más lejos. Tomando al vector definido en (4.6) como una función de λ , definimos

$$|\lambda\rangle = c_N(\lambda) \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{\sqrt{k!}} \text{He}_k(\lambda) |k\rangle, \quad (4.7)$$

vista como una función de \mathbb{R} en \mathcal{H}^N , y no únicamente sus valores en los $N + 1$ ceros de $\text{He}_{N+1}(\lambda) = 0$. La constante arbitraria v_0 fue reemplazada por $c_N(\lambda)$ para enfatizar que puede depender de λ y N .

Como ya demostramos, la función $\lambda \mapsto |\lambda\rangle$ cumple con la propiedad

$$\left(\sqrt{2}\hat{\xi}_N + \lambda\right) |\lambda\rangle = \frac{(-1)^N}{\sqrt{N!}} \text{He}_{N+1}(\lambda) c_N(\lambda) |N\rangle, \quad (4.8)$$

cuya norma es

$$d_N(\lambda) := \left\| \left(\sqrt{2}\hat{\xi}_N + \lambda\right) |\lambda\rangle \right\|^2 = \frac{1}{N!} \text{He}_{N+1}(\lambda)^2 c_N(\lambda)^2, \quad (4.9)$$

y por supuesto se anula en los valores propios adecuados. Lo verdaderamente interesante es que cuando N es grande, la función $d_N(\lambda)$ así definida no sólo tiene más ceros, sino que también tiende a cero de una manera uniforme. Como $d_N(\lambda)$ indica en algún sentido qué tan lejos está $|\lambda\rangle$ de ser un vector propio de $\hat{\xi}_N$, eso puede interpretarse como que, para N grande, $\hat{\xi}_N$ tiene a un continuo de “vectores propios aproximados”, los vectores $|\lambda\rangle$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ no necesariamente un valor propio, donde la indicación de la calidad de la aproximación es justamente $d_N(\lambda)$.

Antes de demostrar esto hay que cuidar un detalle técnico, debido a la constante de normalización $c_N(\lambda)$. Tiene poco interés decir que $\left(\sqrt{2}\hat{\xi}_N + \lambda\right) |\lambda\rangle$ tiende a cero si $|\lambda\rangle$ también tiende a cero, de modo que hay que escoger la constante $c_N(\lambda)$ de manera que $|\lambda\rangle$ tenga una normalización constante. Por ello, es natural pedir que

$$1 = \langle \lambda | \lambda \rangle = c_N(\lambda)^2 \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \text{He}_k(\lambda)^2.$$

Esta suma es un polinomio de grado $2N$, que afortunadamente puede ser evaluada de manera exacta, de nuevo gracias a la fórmula de Christoffel-Darboux, (3.31):

$$\sum_{m=0}^n \frac{1}{h_m} f_m(x) f_m(y) = \frac{k_n}{k_{n+1} h_n} \frac{f_{n+1}(x) f_n(y) - f_n(x) f_{n+1}(y)}{x - y},$$

donde si $f_n = \text{He}_n$ los coeficientes apropiados son $k_n = 1$ y $h_n = \sqrt{2\pi n!}$ [1, 22.2.15]. Así, para $\lambda \neq \mu$ se tiene que

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \text{He}_k(\lambda) \text{He}_k(\mu) = \frac{1}{N!} \frac{\text{He}_{N+1}(\lambda) \text{He}_N(\mu) - \text{He}_N(\lambda) \text{He}_{N+1}(\mu)}{\lambda - \mu}.$$

En nuestro caso interesa esa suma cuando $\lambda = \mu$, lo cual puede lograrse tomando el límite $\mu \rightarrow \lambda$ en ambos lados. El lado izquierdo es trivial, mientras que el lado derecho se resuelve con la regla de L'Hôpital. Así,

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \text{He}_k(\lambda)^2 = \frac{\text{He}_N(\lambda) \text{He}'_{N+1}(\lambda) - \text{He}_{N+1}(\lambda) \text{He}'_N(\lambda)}{N!} = -\frac{\text{He}_{N+1}(\lambda)^2}{N!} \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\text{He}_N(\lambda)}{\text{He}_{N+1}(\lambda)} \right].$$

Esta última expresión puede utilizarse para obtener una forma cerrada para $d_N(\lambda)$, de la siguiente manera. Sustituyendo $c_N(\lambda)$ se tiene que

$$\begin{aligned} d_N(\lambda) &= \frac{\text{He}_{N+1}(\lambda)^2}{\text{He}_N(\lambda) \text{He}'_{N+1}(\lambda) - \text{He}_{N+1}(\lambda) \text{He}'_N(\lambda)} \\ &= -\frac{1}{\frac{d}{d\lambda} [\text{He}_N(\lambda)/\text{He}_{N+1}(\lambda)]}. \end{aligned}$$

Más aún, si se utiliza la recursión $\text{He}'_n(x) = n \text{He}_{n-1}(x)$ puede simplificarse lo anterior notando que

$$\frac{\text{He}_N(\lambda)}{\text{He}_{N+1}(\lambda)} = \frac{1}{N+1} \frac{\text{He}'_{N+1}(\lambda)}{\text{He}_{N+1}(\lambda)} = \frac{1}{N+1} \frac{d}{d\lambda} \ln(\text{He}_{N+1}(\lambda)),$$

para obtener la ecuación

$$d_N(\lambda) = -\frac{N+1}{\frac{d^2}{d\lambda^2} [\ln(\text{He}_{N+1}(\lambda))]} \quad (4.10)$$

Esta relación, aunque es particularmente simple y ciertamente no carece de belleza, es poco útil, sin embargo, cuando se trata de evaluar numéricamente a $d_N(\lambda)$, o de examinar sus propiedades. Para esos fines, conviene sustituir $\text{He}'_n(x) = n \text{He}_{n-1}(x)$ directamente, obteniéndose

$$d_N(\lambda) = \frac{\text{He}_{N+1}(\lambda)^2}{(N+1) \text{He}_N(\lambda) \text{He}_N(\lambda) - N \text{He}_{N+1}(\lambda) \text{He}_{N-1}(\lambda)}. \quad (4.11)$$

Eso deja en claro que para λ suficientemente grande, $d_N(\lambda)$ es un cociente de polinomios mónicos, uno de grado $2(N+1)$ y otro de grado $2N$, con lo cual para λ grande se comporta como λ^2 :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{d_N(\lambda)}{\lambda^2} = 1.$$

Para λ relativamente pequeño la cosa cambia, y es mucho más interesante. Siendo proporcional a $\text{He}_{N+1}(\lambda)^2$ con un denominador finito que no se anula, $d_N(\lambda)$ es regular y tiene exactamente $N+1$ ceros, que corresponden, como se dijo arriba, a los $N+1$ vectores propios de $\hat{\xi}_N$ en \mathcal{H}^N . Dichos ceros están acotados (cf. [1], ecs. (22.15.40), (22.15.41) y (22.16.8)) por $\sqrt{2}\sqrt{N+1}$, por lo que su separación es aproximadamente $\sqrt{2}\sqrt{N+1}/(N+1) = \sqrt{\frac{2}{N+1}}$.

Esto permite, por otro lado, mejorar la aproximación anterior cuando λ es grande, y cuantificar qué significa “grande” en este contexto. En particular, la aproximación vale después del último cero, y puede demostrarse que

$$d_N(\lambda) = \lambda^2 - 3N + \frac{N(5-N)}{\lambda^2} + \dots \quad \text{para } \lambda \gg \sqrt{N}.$$

Para hacer precisa la afirmación de que la separación de los ceros se aproxima por $\sqrt{2/(N+1)}$, hay que recurrir a una expresión asintótica para $d_N(\lambda)$, que se obtiene de la de $\text{He}_n(x)$: para x fija y $n \rightarrow \infty$, se tiene que (cf. [1], ecs. (13.6.38) y (13.5.16))

$$\text{He}_n(x) = \frac{2^{n/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) e^{\frac{1}{2}x^2} \cos\left(x\sqrt{n} - n\frac{\pi}{2}\right) \left[1 + O(n^{-1/2})\right].$$

Para obtener de ahí una expresión para $d_N(\lambda)$ hay que atacar primero el denominador de (4.11), lo cual conviene hacer por partes:

$$\begin{aligned} (N+1) \text{He}_N(\lambda) \text{He}_N(\lambda) &\approx (N+1) \frac{2^N e^{x^2}}{\pi} \Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)^2 \cos^2\left(x\sqrt{N} - N\frac{\pi}{2}\right) \\ &\approx (N+1) \frac{2^N e^{x^2}}{\pi} \left(\sqrt{\frac{4\pi}{N+1}} \left(\frac{N+1}{2e}\right)^{\frac{N+1}{2}}\right)^2 \cos^2\left(x\sqrt{N} - N\frac{\pi}{2}\right) \\ &= (N+1) \frac{2^N e^{x^2}}{\pi} \frac{4\pi}{N+1} \left(\frac{N+1}{2e}\right)^{N+1} \cos^2\left(x\sqrt{N} - N\frac{\pi}{2}\right) \\ &= e^{x^2} e^{-(N+1)} (N+1)^{N+1} \left[1 + \cos\left(2\sqrt{N}x - N\pi\right)\right] \\ &= e^{x^2} e^{-(N+1)} (N+1)^{N+1} \left[1 + (-1)^N \cos\left(2\sqrt{N}x\right)\right] \end{aligned}$$

por un lado, mientras que por otro

$$\begin{aligned} N \text{He}_{N+1}(\lambda) \text{He}_{N-1}(\lambda) &\approx N \frac{2^N e^{x^2}}{\pi} \Gamma\left(\frac{N+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \cos\left(x\sqrt{N+1} - (N+1)\frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad \times \cos\left(x\sqrt{N-1} - (N-1)\frac{\pi}{2}\right) \\ &\approx N \frac{2^N e^{x^2}}{\pi} \sqrt{\frac{4\pi}{N+2}} \left(\frac{N+2}{2e}\right)^{\frac{N+2}{2}} \sqrt{\frac{4\pi}{N}} \left(\frac{N}{2e}\right)^{\frac{N}{2}} \\ &\quad \times \cos\left(x\sqrt{N+1} - (N+1)\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(x\sqrt{N-1} - (N-1)\frac{\pi}{2}\right) \\ &= e^{x^2} e^{-(N+1)} (N(N+2))^{\frac{N+1}{2}} \left[\cos\left(x\sqrt{N+1} - x\sqrt{N-1} - \pi\right)\right. \\ &\quad \left.+ \cos\left(x\sqrt{N+1} + x\sqrt{N-1} - N\pi\right)\right] \\ &= e^{x^2} e^{-(N+1)} ((N+1)^2 - 1)^{\frac{N+1}{2}} \left[-\cos\left(\frac{2x}{\sqrt{N+1} + \sqrt{N-1}}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(-1)^N \cos \left(x \left(\sqrt{N+1} + \sqrt{N-1} \right) \right) \Big] \\
& \approx e^{x^2} e^{-(N+1)} \left((N+1)^2 - 1 \right)^{\frac{N+1}{2}} \left[-\cos \left(\frac{x}{\sqrt{N}} \right) + (-1)^N \cos \left(2\sqrt{N}x \right) \right],
\end{aligned}$$

donde además

$$\left((N+1)^2 - 1 \right)^{\frac{N+1}{2}} = (N+1)^{N+1} \left(1 - \frac{1}{(N+1)^2} \right)^{\frac{N+1}{2}} \approx (N+1)^{N+1} \left(1 - \frac{1}{2(N+1)} \right)$$

por la serie binomial hasta su segundo término.

Entonces, restando ambos resultados, se obtiene que

$$\begin{aligned}
& (N+1) \text{He}_N(\lambda) \text{He}_N(\lambda) - N \text{He}_{N+1}(\lambda) \text{He}_{N-1}(\lambda) \approx \\
& \approx e^{x^2} e^{-(N+1)} (N+1)^{N+1} \left(1 + (-1)^N \cos \left(2\sqrt{N}x \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(1 - \frac{1}{2(N+1)} \right) \left[-\cos \left(\frac{x}{\sqrt{N}} \right) + (-1)^N \cos \left(2\sqrt{N}x \right) \right] \right) \\
& \approx e^{x^2} e^{-(N+1)} (N+1)^{N+1} \left[1 + \cos \left(\frac{x}{\sqrt{N}} \right) + \frac{(-1)^N}{2(N+1)} \cos \left(2\sqrt{N}x \right) \right].
\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando la expresión asintótica para el numerador,

$$\begin{aligned}
\text{He}_{N+1}(x)^2 & \approx \frac{2^{N+1}}{\pi} \Gamma \left(\frac{N+2}{2} \right) e^{x^2} \cos^2 \left(x\sqrt{N+1} - (N+1)\frac{\pi}{2} \right) \\
& \approx \frac{2^{N+1} e^{x^2}}{\pi} \frac{4\pi}{N+2} \left(\frac{N+2}{2e} \right)^{N+2} \cos^2 \left(x\sqrt{N+1} - (N+1)\frac{\pi}{2} \right) \\
& \approx e^{x^2} e^{-(N+2)} (N+2)^{N+1} \left[1 + \cos \left(2\sqrt{N+1}x - (N+1)\pi \right) \right] \\
& \approx e^{x^2} e^{-(N+2)} (N+2)^{N+1} \left[1 + (-1)^{N+1} \cos \left(2\sqrt{N+1}x \right) \right],
\end{aligned}$$

obtenemos la expresión deseada para $d_N(\lambda)$,

$$d_N(\lambda) \approx \frac{1}{e} \left(\frac{N+2}{N+1} \right)^{N+1} \frac{1 + (-1)^{N+1} \cos \left(2\sqrt{N+1}\lambda \right)}{1 + \cos \left(\frac{\lambda}{\sqrt{N}} \right) + \frac{(-1)^N}{2(N+1)} \cos \left(2\sqrt{N}\lambda \right)}.$$

Esto puede simplificarse, utilizando el límite $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow e$ para eliminar el primer coeficiente. Entonces, ignorando los términos en $\frac{1}{N+1}$, se obtiene finalmente

$$d_N(\lambda) \approx \frac{1 + (-1)^{N+1} \cos \left(2\sqrt{N+1}\lambda \right)}{1 + \cos \left(\frac{\lambda}{\sqrt{N}} \right)}. \quad (4.12)$$

Esta expresión es válida cuando $\lambda \ll \sqrt{2\sqrt{N}}$, y como el denominador oscila lentamente, no alcanza a anularse y la función es siempre regular. Esto demuestra que

los ceros de $d_N(\lambda)$ están igualmente espaciados, con una separación aproximada de $\pi/\sqrt{N+1}$ entre ceros subsecuentes.

Podemos ahora acabar nuestro análisis del espectro de $\hat{\xi}_N$, cuando N es grande. Vimos arriba que sus valores propios se encuentran entre $-\sqrt{2(N+1)}$ y $\sqrt{2(N+1)}$, es decir, en intervalos cada vez más grandes, mientras que en el interior del intervalo se encuentran igualmente espaciados, con separaciones $\pi/\sqrt{N+1}$ cada vez más pequeñas.

Esto quiere decir que si N es grande, puede considerarse al espectro como un continuo, es decir, que el espectro $\sigma(\hat{\xi}_N)$ tiende a ser todos los reales. Esta noción de límite parece bastante vaga, pero sí puede hacerse precisa. Por ejemplo, se tiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma(\hat{\xi}_N) := \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{N=k}^{\infty} \sigma(\hat{\xi}_N)} = \mathbb{R}, \quad (4.13)$$

donde la línea representa la cerradura topológica en \mathbb{R} .⁴

Este límite es importante, pues el procedimiento completo – la restricción de un operador a un espacio de dimensión finita para su estudio, para posteriormente tomar el límite a infinito de dicha dimensión – coincide exactamente con el del formalismo de Pegg y Barnett para el estudio de la formulación cuántica de la fase óptica [5, 41].

El resultado de Pegg y Barnett es análogo al nuestro: obtienen para la cantidad $e^{i\phi}$ un espectro que consiste en $N+1$ puntos igualmente distribuidos en el círculo unitario, que cuando N tiende a infinito se acercan, en el sentido de (4.13), a ser todo el círculo unitario. En este sentido, el presente capítulo puede verse como un estudio de la cuadratura $\hat{\xi}$ en el formalismo de Pegg y Barnett.

Regresando a $d_N(\lambda)$, tenemos en resumen que para λ grande se comporta como λ^2 , mientras que para λ pequeño oscila senoidalmente entre 0 y 1, con una amplitud que crece ligeramente con λ . Presentamos en la figura 4.1 ejemplos típicos del comportamiento de $d_N(\lambda)$.

Aquí vale la pena considerar exactamente qué significa el que en la región de los valores propios $d_N(\lambda)$ oscile entre 0 y 1. Por la normalización que se escogió, con $\langle \lambda | \lambda \rangle = 1$ para cada N , esto significa que siempre existen λ 's tales que $d_N(\lambda) = \left\| (\sqrt{2}\hat{\xi}_N + \lambda) | \lambda \rangle \right\|^2 = \langle \lambda | \lambda \rangle$.

Podría entonces parecer que el vector $|\lambda\rangle$ llega a estar todo lo lejos posible de ser un vector propio, pero esto es incorrecto. Por ejemplo, para el último vector de la base se cumple $\left\| (\sqrt{2}\hat{\xi}_N + \lambda) | N \rangle \right\|^2 = N + \lambda^2 \geq N$, de modo que la curva $\lambda \mapsto |\lambda\rangle$ sí está mucho más cerca de tener únicamente vectores propios de lo que en principio se podría esperar, lo cual justifica parcialmente el nombre “vectores propios aproximados” aunque no se da lo que uno en principio pediría para tal concepto – que $d_N(\lambda)$ tendiera a cero de manera uniforme con $N \rightarrow \infty$.

⁴Esta noción de límite es bastante útil: por ejemplo, es con esta definición que puede hacerse precisa la noción de que los hiperboloides $x^2 + y^2 - z^2 = \pm a^2$ “tienden” al cono $x^2 + y^2 = z^2$ cuando $a \rightarrow 0$, o bien que los elipsoides $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$ “tienden” al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ cuando se hacen más alargados y $c \rightarrow \infty$.

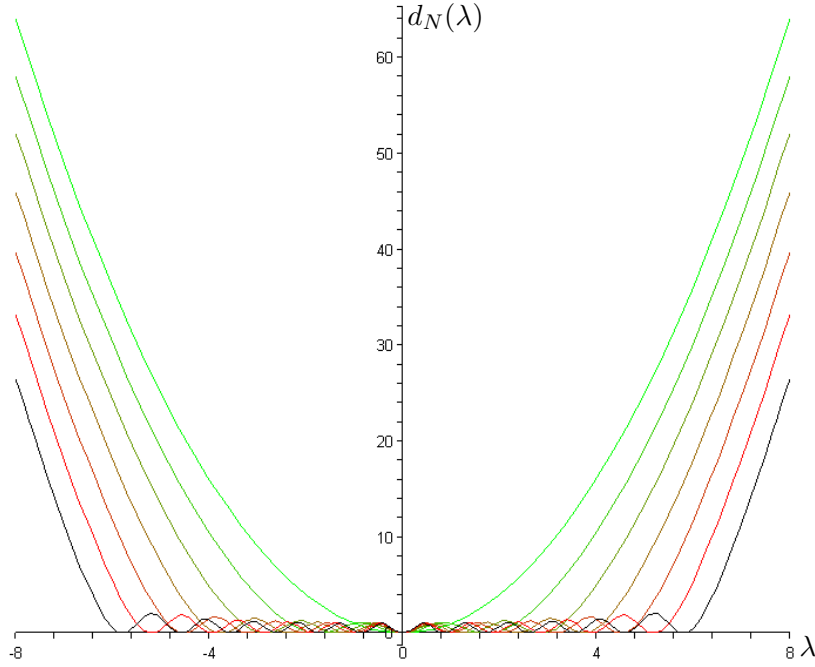


Figura 4.1: Gráfica de $d_N(\lambda)$ en función de λ para N par de 0 (verde) a 10 (rojo) y 12 (negro). Se observa que la separación entre los ceros disminuye al mismo tiempo que el intervalo en el que ocurren crece. Además, la amplitud de la oscilación se mantiene básicamente constante.

4.3. Cuadraturas arbitrarias

Consideramos ahora al operador de momento $\hat{\pi}$, así como una clase general de operadores conocida como *cuadraturas*. Éstas se obtienen de los operadores de posición y momento, $\hat{\xi}$ y $\hat{\pi}$, mediante una transformación canónica; en particular, mediante una rotación del espacio fase por un ángulo β . Así, se definen los operadores

$$\hat{\xi}_\beta = \cos(\beta)\hat{\xi} + \text{sen}(\beta)\hat{\pi}, \quad (4.14a)$$

$$\hat{\pi}_\beta = -\text{sen}(\beta)\hat{\xi} + \cos(\beta)\hat{\pi}. \quad (4.14b)$$

De ahí se obtiene fácilmente que $\hat{\xi}_\beta = \cos(\beta)\hat{\xi} + \text{sen}(\beta)\hat{\pi} = \cos(\beta)\frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} + \text{sen}(\beta)\frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\cos(\beta) - i\text{sen}(\beta))\hat{a} + (\cos(\beta) + i\text{sen}(\beta))\hat{a}^\dagger] = \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{-i\beta}\hat{a} + e^{i\beta}\hat{a}^\dagger]$; análogamente, $\hat{\pi}_\beta = \frac{1}{i\sqrt{2}} [e^{-i\beta}\hat{a} - e^{i\beta}\hat{a}^\dagger]$. Como $\cos(\beta + \pi/2) = -\text{sen}(\beta)$ y $\text{sen}(\beta + \pi/2) = \cos(\beta)$, se puede ver que $\hat{\xi}_{\beta+\pi/2} = \hat{\pi}_\beta$ y $\hat{\pi}_{\beta+\pi/2} = -\hat{\xi}_\beta$. En particular, se tiene que $\hat{\pi} = \hat{\xi}_{\pi/2}$, de modo que para investigar a cualquier cuadratura de momento $\hat{\pi}_\beta$ y, en particular, a $\hat{\pi}$, basta únicamente con estudiar a $\hat{\xi}_\beta$.

Dicho estudio resulta a estas alturas trivial, ya que todas las cuadraturas son similares, en el sentido técnico. En particular, las liga la transformación unitaria que

cambia la fase de la base de número de $|n\rangle$ a $e^{i\beta n}|n\rangle$, misma que puede expresarse como $U(\beta) = e^{i\beta\hat{n}}$. Para esta transformación se cumple que

$$\begin{aligned} U(\beta)\hat{a}U(\beta)^\dagger |n\rangle &= e^{i\beta\hat{n}}\hat{a}e^{-i\beta\hat{n}} |n\rangle = e^{i\beta\hat{n}}\hat{a}e^{-i\beta n} |n\rangle = \sqrt{n}e^{-i\beta n}e^{i\beta\hat{n}} |n-1\rangle \\ &= \sqrt{n}e^{-i\beta n}e^{i\beta(n-1)} |n-1\rangle = e^{-i\beta}\hat{a} |n\rangle, \end{aligned}$$

de modo que $U(\beta)\hat{a}U(\beta)^\dagger = e^{-i\beta}\hat{a}$ y, tomando la adjunta, $U(\beta)\hat{a}^\dagger U(\beta)^\dagger = e^{i\beta}\hat{a}^\dagger$.

Esto quiere decir que $\hat{\xi}_\beta = U(\beta)\hat{\xi}U(\beta)^\dagger$, con lo cual $\hat{\xi}$ y $\hat{\xi}_\beta$ son similares para cualquier β . Por ello, tienen exactamente los mismos valores propios y sus vectores propios están apropiadamente relacionados por la transformación de similaridad $U(\beta)$; lo mismo ocurre para el vector $|\lambda\rangle$ de arriba, de modo que la función $d_N(\lambda)$ no se altera.

Lo anterior depende, por supuesto, de que las relaciones derivadas arriba entre $\hat{\xi}$ y $\hat{\xi}_\beta$ se mantengan al pasar del espacio completo \mathcal{H} a los espacios dimensionalmente finitos \mathcal{H}^N . Eso ocurre porque el operador de proyección $\Pi_N : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^N$ conmuta con la transformación canónica (por ser esta última lineal) así como con la transformación de similaridad $U(\beta)$, ya que ambos son diagonales en la base de número.

4.4. La matriz de Jacobi

Nos enfocamos ahora en un aspecto bastante particular de los resultados encontrados en este capítulo, a saber, el polinomio característico de la cuadratura de posición, dada por (4.1):

$$\det(\hat{\xi}_N - \lambda) = \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1}} H_{N+1}(\lambda).$$

Esta expresión puede simplificarse considerablemente. En primer lugar, el signo menos puede absorberse en el determinante para obtenerse $H_{N+1}(\lambda) = 2^{N+1} \det(\lambda - \hat{\xi}_N)$; como todas las cuadraturas son similares, ahí puede cambiarse $\hat{\xi}_N$ por $-\hat{\xi}_N$ sin perder generalidad. En segundo lugar, si se cambia la normalización de los polinomios de Hermite a la usada arriba, $\text{He}_n(\lambda) = 2^{-n/2} H_n(\lambda/\sqrt{2})$, se obtiene

$$\text{He}_{N+1}(\lambda) = 2^{-\frac{N+1}{2}} H_{N+1}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right) = 2^{+\frac{N+1}{2}} \det\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \hat{\xi}_N\right) = \det\left(\lambda + \sqrt{2}\hat{\xi}_N\right).$$

Es decir,

$$\text{He}_{N+1}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \sqrt{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & \sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{N} & \lambda \end{pmatrix}.$$

Podemos ahora darle la vuelta a esta expresión, y verla como una nueva representación de los polinomios de Hermite, añadida a las bien conocidas como la fórmula

de Rodrigues y la función generadora. No necesariamente es una expresión útil para el cálculo numérico del polinomio, pero sí es sorprendente y está, como hemos visto, muy relacionada con la teoría que rodea a los polinomios de Hermite, mismos que en particular describen la base de número con respecto a la que se toma este último determinante.

Podemos ahora generalizar, y preguntarnos si es posible encontrar representaciones en forma de polinomio característico para una familia arbitraria de polinomios ortogonales, o por lo menos para las familias clásicas.

Un primer requisito para la existencia de tal representación es trivial: como todo polinomio característico es mónico (es decir, tiene coeficiente principal igual a 1), debemos pedir lo mismo para nuestra familia de polinomios. Esto siempre puede hacerse, cambiando la normalización de la familia, aunque ello signifique que los polinomios dejen de ser ortonormales.

Con esta objeción fuera del camino, demostraremos ahora que sí es posible encontrar dicha representación. Comenzamos definiendo una familia de matrices simétricas tridiagonales $J^{(n)}$, en términos de dos sucesiones de parámetros, a_n (con $n = 0, 1, 2, \dots$) y b_n (con $n = 1, 2, 3, \dots$) de la forma

$$J^{(n)} = \begin{pmatrix} a_0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n & a_n \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Entonces, expandiendo por menores a lo largo de la última columna y luego a lo largo del último renglón, de manera análoga a lo hecho anteriormente con el polinomio característico del operador de posición, se obtiene la relación de recurrencia

$$\det(\lambda + J^{(n)}) = (\lambda + a_n) \det(\lambda + J^{(n-1)}) - b_n^2 \det(\lambda + J^{(n-2)}). \quad (4.16)$$

Esta relación es la forma general de la relación de recurrencia de una familia cualquiera de polinomios ortogonales; el único requisito – excluyendo el caso de que las b_n sean imaginarias – es que la medida de ortogonalidad sea definida positiva, de modo que ningún polinomio tenga norma negativa. Las condiciones iniciales para esta relación de recurrencia, los polinomios 1 y $\lambda + a_0$, son de nuevo suficientemente generales para cubrir a una familia arbitraria de polinomios ortogonales mónicos.

Más aún, dada una familia arbitraria de polinomios, puede obtenerse fácilmente (donde la facilidad depende de la información con que se cuente sobre dichos polinomios) la relación de recurrencia, y de ella se obtienen fácilmente las entradas, las a_n y b_n , de las matrices $J^{(n)}$ cuyos polinomios característicos son los polinomios dados.

Esta matriz se conoce en la literatura de funciones especiales como la *matriz de Jacobi* de cada familia de polinomios, y se conoce desde hace algún tiempo. El primero

en utilizarla de manera fundamental fue Jacobi, en su estudio de las cuadraturas de Gauss [20, pp. 152-153] (es decir, de la aproximación a la integral de una función mediante su evaluación en un número finito de puntos).

En ese campo esta representación sigue siendo particularmente útil, ya que los puntos donde se evalúa la función a integrar suelen ser los ceros de una familia de polinomios [20]. Los resultados de esta sección permiten encontrar dichos ceros como los valores propios de una matriz rala, y por lo tanto hacen el problema accesible a los algoritmos del álgebra lineal, que suelen ser particularmente eficientes [33].

Esta representación no es directamente útil para el cálculo numérico de los polinomios, pero sí aparece en algunos algoritmos comunes como el de Lanczos [20, p. 212] o en algoritmos de cálculo de los coeficientes de recurrencia por discretización de la medida de ortogonalidad [20, p. 98]. Además, es de utilidad en el estudio de la función generadora de momentos, $\sum_{n \geq 0} \mu_n x^n$ para $\mu_n = \int t^n d\mu(t)$ [3, pp. 266-269], con la cual se puede recuperar la medida μ con respecto a la cual es ortonormal una familia dada de polinomios.

Finalmente, el estudio de matrices de Jacobi como operadores, ya sea en espacios de dimensión finita o infinita, es interesante por derecho propio [14, pp. 13-35] tanto por la riqueza de los resultados obtenibles como porque dichos operadores aparecen naturalmente en varios contextos, particularmente los relacionados a la teoría de representaciones de grupos [24, 37, 38, 55, 56]; nuestro caso particular con los polinomios de Hermite es un ejemplo de ello, donde el grupo en juego es el de Heisenberg-Weyl.

Mencionamos aquí una última propiedad de la matriz de Jacobi: si se obtiene, dada una familia de polinomios ortogonales, su representación como los polinomios característicos de las matrices de Jacobi correspondientes, entonces el Teorema de Cayley-Hamilton asegura que los polinomios se anulan en la matriz correspondiente.

Así, si se empieza con una familia de polinomios $\{f_0, f_1, f_2, \dots\}$ y se les expresa como los polinomios característicos $f_n(\lambda) = \det(\lambda - J^{(n)})$ para matrices $J^{(n)}$ de la forma de (4.15) apropiadamente escogidas, entonces el Teorema de Cayley-Hamilton asegura que

$$f_n(J^{(n)}) = 0.$$

Es decir, se asegura la existencia de soluciones matriciales de la ecuación $f_n(X) = 0$.

En nuestro caso particular, donde las matrices de Jacobi son los operadores de posición restringidos, encontramos así soluciones matriciales explícitas y elementales de la ecuación

$$\text{He}_n(X) = 0,$$

para cada n . Esto no es un resultado trivial, sobre todo si se considera la misma ecuación, $\text{He}_n(x) = 0$, pero con variable real x : ahí se conocen la existencia y número de las raíces, así como un buen número de propiedades, pero no se conocen expresiones exactas para los ceros salvo en los primeros casos.

Por supuesto, la solución $X = \sqrt{2}\hat{\xi}_N$ no es, ni mucho, la única solución de $\text{He}_n(X) = 0$, pues – por ejemplo – pueden obtenerse soluciones utilizando matrices diagonales de cualquier tamaño cuyas entradas sean los ceros de $\text{He}_n(x) = 0$. Dejando abierta la

pregunta de la posible existencia de otras soluciones, lo que sí podemos hacer en este momento es caracterizar exactamente el resultado que ya demostramos.

La diferencia fundamental entre nuestra solución elemental y las otras mencionadas arriba es que, en su representación diagonal, nuestra solución contiene como valor propio a cada cero de $\text{He}_n(x) = 0$ exactamente una vez, de modo que $\text{He}_n(\lambda)$ no sólo es su polinomio característico, sino que es su *polinomio mínimo*.

Paréntesis matemático 4.1. Polinomio mínimo

Dada una matriz arbitraria $M \in M_{r \times r}(\mathbb{C})$, el Teorema de Cayley-Hamilton asegura la existencia de un polinomio, que de hecho es el polinomio característico de M , $f(\lambda) = \det(\lambda - M)$, bajo el cual M se anula, es decir, tal que $f(M) = 0$.

Esto quiere decir que el conjunto de números naturales $S = \{n \in \mathbb{N} : \text{existe } g \text{ polinomio de grado } n \text{ tal que } g(M) = 0\}$ es no vacío y por tanto tiene un mínimo. Es decir, existe un polinomio de grado mínimo $p(x)$ que anula a M . Este polinomio se conoce como el *polinomio mínimo* de M .

Puede demostrarse [19, pp. 516-524] que $p(x)$ es único salvo por una constante multiplicativa, y por tanto único si se pide que sea mónico. Más aún, $p(x)$ divide a cualquier polinomio $g(x)$ que anule a M y tiene exactamente los mismos ceros que el polinomio característico de M . Tiene el grado máximo posible (igual a la dimensión de M) cuando \mathbb{C}^r es M -cíclico (es decir, cuando existe $v \in \mathbb{C}^r$ tal que $\{v, Mv, \dots, M^{r-1}v\}$ es base de \mathbb{C}^r) y el grado mínimo posible (igual al número de valores propios) si y sólo si M es diagonalizable.

En particular, $p(x)$ tiene a cada valor propio de M con multiplicidad igual al número de bloques de Jordan en los que aparece, de modo que si M es diagonalizable cada cero aparece una única vez y $p(x)$ coincide con el polinomio característico si y sólo si todos los valores propios son distintos.

Así, pedir que $\text{He}_n(x)$ sea el polinomio mínimo de una matriz A equivale a decir que A tiene a cada cero de $\text{He}_n(x)$ como valor propio de multiplicidad 1. Por ello, los valores propios de A coinciden con los de $\sqrt{2}\hat{\xi}_N$ en posición y multiplicidad, de modo que ambas matrices son similares: existe $Q \in GL(\mathbb{C}, r)$ tal que $A = Q^{-1}\sqrt{2}\hat{\xi}_N Q$, lo cual caracteriza completamente a A .

Además, como este argumento depende únicamente de que todos los ceros de $\text{He}_n(x)$ sean distintos, el resultado vale siempre que ese sea el caso. De hecho, tal cosa ocurre para *cualquier* familia de polinomios ortogonales cuya medida de ortogonalidad sea definida positiva [54, p. 44].

Cerramos esta sección con otro ejemplo, particularmente simple e interesante, de la representación en matriz de Jacobi de una familia clásica de polinomios ortogonales. Consideramos una matriz con la misma estructura que $\hat{\xi}_N$, pero ahora omitiendo las raíces cuadradas:

$$C^{(n)} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}}^n.$$

Un cálculo sencillo da los polinomios de las primeras $C^{(n)}$: $\det(\lambda - C^{(1)}) = \lambda$ y $\det(\lambda - C^{(2)}) = \lambda^2 - 1$; la relación de recurrencia, por otro lado, se obtiene de (4.16):

$$\det(\lambda - C^{(n+1)}) = \lambda \det(\lambda - C^{(n)}) - \det(\lambda - C^{(n-1)}).$$

Con esto basta para identificar a estos polinomios como los polinomios de Chebyshev del segundo tipo, definidos por

$$U_n(\cos(\theta)) = \frac{\text{sen}((n+1)\theta)}{\text{sen}(\theta)},$$

pues cumplen la misma relación de recurrencia y las mismas condiciones iniciales. En particular,

$$U_n(\lambda) = \det(2\lambda - C^{(n)}).$$

Como queda claro de la definición dada arriba, el estudio de los polinomios de Chebyshev se facilita tremendamente si se toma su variable igual al coseno de un ángulo θ . Por ejemplo, queda claro que sus ceros ocurren cuando $\theta = \frac{k\pi}{n+1}$, de modo que

$$U_n(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \quad \text{para } k \in \{1, 2, \dots, n-1, n\},$$

y en ese caso $2\lambda = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ es un valor propio de $C^{(n)}$. Esta identificación no es fortuita: $C^{(n)}$ coincide con el operador de fase $2\widehat{\text{c}}\text{os}(i\phi)$ en el formalismo de Susskind-Glogower de la fase cuántica [21, pp. 36-39], cuando se restringe el segundo al espacio de fotones finitos \mathcal{H}^N en el que trabajamos en este capítulo.

Capítulo 5

Conclusiones

Este trabajo presenta tres contribuciones principales, correspondientes a los capítulos 2, 3 y 4, respectivamente. En el capítulo 2 se presenta la cuantización del campo electromagnético en regiones libres de cargas, lo cual simplifica el tratamiento al evitar la necesidad de utilizar los campos potenciales.

Sin embargo, al presentar la cuantización se evita recurrir a la solución clásica, como se hace en varios libros de texto, lo cual va en contra del principio de cuantización canónica, el cual opera al nivel del hamiltoniano y sus variables pero no de sus soluciones. En cambio, se cuantiza el formalismo hamiltoniano en su formulación compleja, para *después* desacoplarlo, con un cambio mecánico-cuántico de variables, en variables reales e independientes.

La esperanza al utilizar este enfoque sobre la cuantización es presentar un tratamiento claro de cómo se cuantiza el campo electromagnético sin entrar en los detalles técnicos, bastante más complicados, que surgen al incluir partículas cargadas en el sistema. Adicionalmente, se demuestra que puede llegarse a la misma descripción cuántica del campo electromagnético *sin* pasar por los potenciales, cuantizando directamente los campos de fuerza, \mathbf{E} y \mathbf{B} .

Por supuesto, este enfoque tiene sus desventajas. Al utilizar coordenadas cartesianas en la cuantización, se obtienen vectores de polarización que no dependen de la posición, lo cual es crucial en el proceso de cuantización; si se intentaran utilizar otras coordenadas, las constricciones $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ serían mucho más difíciles de asegurar, tanto así que necesitarían alteraciones al proceso de cuantización canónica mismo, pues debe cuantizarse entonces un sistema hamiltoniano con constricciones.

Adicionalmente, como se ignoró la presencia de partículas cargadas a la hora de dar un formalismo hamiltoniano para el campo y cuantizarlo, a la hora de describir la interacción de las cargas con el campo cuantizado deberán proponerse energías de interacción *ad hoc*, que no pueden deducirse de primeros principios ni de energías clásicas ya conocidas, y que pueden únicamente, a lo más, reflejar formalmente a sus contrapartes clásicas. Sin embargo, vale la pena considerar la cuantización sin cargas ni potenciales como una ruta sencilla y limpia al campo cuantizado.

El capítulo 3 comienza con una exploración matemática de la estructura que le

impone al espacio de estados \mathcal{H} el requisito de la cuantización canónica de la existencia de operadores $\hat{\xi}, \hat{\pi}$ tales que $[\hat{\xi}, \hat{\pi}] = i1$. Así, se obtiene el espectro de $\hat{\xi}$ y de $\hat{\pi}$, para luego repasar la definición y espectro del operador de número, \hat{n} , y del operador de aniquilación, \hat{a} .

Es este último, proporcional al operador \hat{q}^+ que es de tanta utilidad en el capítulo 2, que es de particular interés. A partir de la existencia de, por un lado, vectores propios cuyo valor propio puede ser cualquier número complejo α , y, por otro, de una base en la que \hat{a} actúa como un bloque de Jordan infinito, se predice, busca, y encuentra la existencia, para cada número complejo α de una base infinita con respecto a la cual \hat{a} actúa como bloque de Jordan con el valor propio deseado.

Es decir, se encuentran los estados que aquí llamamos estados coherentes generalizados, $|\alpha, k\rangle$, con respecto a los cuales \hat{a} actúa como bloque de Jordan, y se caracteriza su estructura en \mathcal{H} : se encuentran dos maneras fundamentalmente distintas de formar conjuntos completos y se encuentran los productos internos, en términos de los polinomios de Laguerre generalizados, entre distintos estados coherentes generalizados. En particular, se muestra que, en contraste con los estados coherentes, los estados coherentes generalizados sí pueden ser ortogonales unos con otros, lo cual podría ser de utilidad al diseñar esquemas numéricos para aproximación de estados cuánticos.

Además, se describe la evolución temporal de los estados coherentes generalizados bajo el hamiltoniano de oscilador armónico, se calculan la energía y su dispersión, y se demuestra que los estados coherentes generalizados coinciden con los estados de número desplazados, como se conoce en la literatura al resultado de actuar con el operador de desplazamiento sobre la base de número.

Así, se describe la estructura analítica particularmente rica del operador de aniquilación, junto con su interacción con la estructura del espacio de Hilbert, esperando que sea de utilidad para la descripción del campo cuantizado en sistemas más complicados.

Finalmente, en el capítulo 4, en una línea independiente, se consideran las cuadraturas del campo (y como ejemplo representativo a la posición, $\hat{\xi}$), cuando se les restringe a espacios de dimensión finita, en los que los estados tienen accesible únicamente un número finito de fotones (que luego puede hacerse tender a infinito). Ahí se demuestra que el polinomio característico de las cuadraturas restringidas es, salvo por constantes, un polinomio de Hermite, cuyos ceros dan los valores propios de la cuadratura.

Más aún, se encuentran fórmulas explícitas para los vectores propios, de nuevo usando los polinomios de Hermite, en términos del valor propio, λ , y se demuestra que dicha fórmula define un vector que está notablemente cerca de ser un vector propio incluso si λ no es un valor propio, por lo que puede considerarse un vector propio aproximado. Para investigar esto, se propone una medida numérica de dicha aproximación, y se investiga analíticamente dicha función, que muestra un régimen oscilatorio y uno creciente y polinomial.

Se mencionan, además, distintas consecuencias matemáticas del desarrollo anterior, y su aplicación a problemas diversos del análisis numérico y las funciones especiales; una consecuencia en particular que parece no haber aparecido es que de este trabajo se desprende la existencia de ceros matriciales de los polinomios de Hermite, que en

contraste con el caso de variable real sí tienen fórmulas elementales y sencillas en términos del grado del polinomio.

El procedimiento de restricción de la dimensión del espacio bajo consideración, y posteriormente el límite de dicha dimensión a infinito, coincide con el formalismo de Pegg y Barnett para el estudio de la fase óptica para el campo cuantizado. Esperamos que este estudio, con sus similitudes y diferencias, permita entender mejor ese formalismo y sus posibles aplicaciones.

Apéndice A

Productos internos II

En este apéndice investigaremos los productos internos entre dos estados coherentes generalizados arbitrarios, de la forma $\langle \alpha, k | \beta, l \rangle$. Conocemos ya su forma cuando $k = l$, del resultado (3.33):

$$\langle \alpha, k | \beta, k \rangle = L_k(|\beta - \alpha|^2) \langle \alpha | \beta \rangle,$$

y tenemos una buena idea de su forma cuando $k \geq l$. Para ese caso propusimos funciones P_k^{k-l} tales que

$$\langle \alpha, k | \beta, l \rangle = P_k^{k-l}(|\beta - \alpha|^2) (\beta - \alpha)^{k-l} \frac{\langle \alpha | \beta \rangle}{\sqrt{k!l!}},$$

y demostramos que dichas funciones son polinomios con coeficientes enteros. Nos dedicamos ahora al estudio detallado de estos polinomios; en particular, demostraremos que son múltiplos de los polinomios de Laguerre generalizados.

El primer caso de interés, cuando $k = l + 1$, ya está casi resuelto. Al desacoplar las relaciones de recurrencia para P_k^0 y P_k^1 , se obtuvo el resultado (3.29), expresando a P_k^1 en términos de los P_k^0 de orden inferior. Este resultado puede ahora, mediante la fórmula de Christoffel-Darboux, extenderse considerablemente:

$$P_k^1(x) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(k-1)!}{m!} P_m^0(x) = (k-1)! \sum_{m=0}^{k-1} L_m(x) = k! \frac{L_{k-1}(x) - L_k(x)}{x}.$$

Aquí, además, puede usarse la relación [1, 22.8.6]

$$-xL_{k-1}^1(x) = x \frac{d}{dx} L_k(x) = k(L_k(x) - L_{k-1}(x))$$

para obtener así

$$P_k^1(x) = (k-1)! L_{k-1}^1(x),$$

lo cual demuestra la hipótesis (3.27).

Ahora buscamos extender este resultado a P_k^j para cualquier j positiva. Empezamos con $j = 2$, calculando

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, k+2 | \beta, k \rangle &= \left\langle \alpha, k+1 \left| \frac{\hat{a} - \alpha}{\sqrt{k+2}} \right| \beta, k \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{k+2}} \langle \alpha, k+1 | ((\beta - \alpha) |\alpha, k\rangle + \sqrt{k} |\beta, k-1\rangle) \\
&= \frac{(\beta - \alpha)}{\sqrt{k+2}} \langle \alpha, k+1 | \alpha, k \rangle + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+2}} \langle \alpha, k+1 | \beta, k-1 \rangle \\
&= \frac{(\beta - \alpha)}{\sqrt{k+2}} \langle \alpha, k+1 | \alpha, k \rangle \\
&\quad + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+2}} \left(\frac{(\beta - \alpha)}{\sqrt{k+1}} \langle \alpha, k | \alpha, k-1 \rangle + \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k+1}} \langle \alpha, k | \beta, k-2 \rangle \right) \\
&\quad \vdots \\
&= \frac{(\beta - \alpha)}{\sqrt{k+2}} \langle \alpha, k+1 | \alpha, k \rangle + \frac{(\beta - \alpha)}{\sqrt{k+2}} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} \langle \alpha, k | \alpha, k-1 \rangle \\
&\quad + \frac{(\beta - \alpha)}{\sqrt{k+2}} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}} \langle \alpha, k-1 | \alpha, k-2 \rangle + \dots \\
&\quad + \frac{(\beta - \alpha)}{\sqrt{k+2}} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}} \dots \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \langle \alpha, 1 | \alpha \rangle \\
&= (\beta - \alpha) \sum_{m=0}^k \frac{\sqrt{(m+1)!} \sqrt{k!}}{\sqrt{(k+2)!} \sqrt{m!}} \langle \alpha, m+1 | \beta, m \rangle \\
&= (\beta - \alpha) \frac{1}{\sqrt{(k+2)(k+1)}} \sum_{m=0}^k \sqrt{m+1} \langle \alpha, m+1 | \beta, m \rangle.
\end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo la definición de P_k^2 y el resultado (3.27), se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{P_{k+2}^2(|\beta - \alpha|^2)}{k!} (\beta - \alpha)^2 \frac{\langle \alpha | \beta \rangle}{\sqrt{(k+2)(k+1)}} &= \langle \alpha, k+2 | \beta, k \rangle \\
&= (\beta - \alpha)^2 \frac{\langle \alpha | \beta \rangle}{\sqrt{(k+2)(k+1)}} \sum_{m=0}^k L_m^1(|\beta - \alpha|^2),
\end{aligned}$$

es decir,

$$P_{k+2}^2(x) = k! \sum_{m=0}^k L_m^1(x).$$

Esto puede simplificarse derivando la fórmula de Christoffel-Darboux en su forma

$$\sum_{m=0}^{k-1} L_m(x) = -\frac{d}{dx} L_k(x), \quad (\text{A.1})$$

ya obtenida, para encontrar que

$$\sum_{m=1}^{k-1} L_{m-1}^1(x) = - \sum_{m=1}^{k-1} \frac{d}{dx} L_m(x) = \frac{d^2}{dx^2} L_k(x) = L_{k-2}^2(x),$$

donde se ha omitido el término constante, de $m = 0$. Con esto,

$$P_{k+2}^2(x) = k! L_k^2(x),$$

y finalmente

$$\langle \alpha, k+2 | \beta, k \rangle = (\beta - \alpha)^2 L_k^2(|\beta - \alpha|^2) \frac{\langle \alpha | \beta \rangle}{\sqrt{(k+2)(k+1)}}.$$

El caso general del producto interno $\langle \alpha, k+j | \beta, k \rangle$ tiene, ahora sí, un trato idéntico a éste, y ya es claro que el resultado sólo puede ser

$$\langle \alpha, k+j | \beta, k \rangle = (\beta - \alpha)^j L_k^j(|\beta - \alpha|^2) \frac{\langle \alpha | \beta \rangle}{\sqrt{(k+j) \cdots (k+1)}},$$

que puede ser expresado alternativamente como

$$\langle \alpha, k | \beta, l \rangle = \sqrt{\frac{l!}{k!}} (\beta - \alpha)^{k-l} L_l^{k-l}(|\beta - \alpha|^2) \langle \alpha | \beta \rangle, \quad \text{para } k \geq l, \quad (\text{A.2})$$

lo cual completa el análisis.

Apéndice B

Formulario

Este apéndice recoge resultados importantes, particularmente del capítulo 3, para ofrecerlos todos en un mismo lugar y así ayudar al lector a navegar las partes más técnicas de este trabajo.

Así, consideramos el álgebra sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} generada por operadores \hat{a} , \hat{a}^\dagger que obedecen el conmutador

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (3.5)$$

y el hamiltoniano

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right). \quad (3.6)$$

Encontramos entonces la llamada base de número $\{|n\rangle\}$, para la cual $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$,

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (3.8)$$

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (3.9)$$

y por ello $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}^{\dagger n} |0\rangle$.

Encontramos entonces los estados coherentes, vectores propios del operador de aniquilación \hat{a} con $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, dados por

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{\frac{1}{2}\alpha(\alpha-\alpha^*)} \pi^{-1/4} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\frac{1}{2}(\xi-\sqrt{2}\alpha)^2} |\xi\rangle, \quad (3.11)$$

y cuyos productos internos y externos obedecen

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{\frac{1}{2}(\alpha^* \beta - \alpha \beta^*)} \exp\left(-\frac{1}{2}|\beta - \alpha|^2\right) \quad (3.12)$$

y

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| = 1. \quad (3.13)$$

En cuanto a los estados coherentes generalizados, fueron definidos como

$$|\alpha, k\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^k}{\sqrt{k!}} |\alpha\rangle, \quad (3.20)$$

definición que asegura que fijando el valor propio sean ortonormales:

$$\langle \alpha, k | \alpha, l \rangle = \delta_{kl}. \quad (3.22)$$

Estos estados obedecen la propiedad de bloque de Jordan con respecto a \hat{a} , con valor propio α , que se utiliza en cuatro formas equivalentes:

$$\hat{a} |\alpha, k\rangle = \alpha |\alpha, k\rangle + \sqrt{k} |\alpha, k-1\rangle, \quad (3.21)$$

$$\alpha |\alpha, k\rangle = \hat{a} |\alpha, k\rangle - \sqrt{k} |\alpha, k-1\rangle, \quad (3.21')$$

$$\langle \alpha, k | \hat{a}^\dagger = \langle \alpha, k | \alpha^* + \sqrt{k} \langle \alpha, k-1 |, \quad (3.21'')$$

$$\langle \alpha, l | \alpha^* = \langle \alpha, l | \hat{a}^\dagger - \sqrt{l} \langle \alpha, l-1 |. \quad (3.21''')$$

Igualmente, sus productos externos cumplen que

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha, k\rangle \langle \alpha, l| = \delta_{kl} 1 \quad (3.24)$$

mientras que sus productos internos están dados por

$$\langle \alpha, k | \beta, k \rangle = L_k(|\beta - \alpha|^2) \langle \alpha | \beta \rangle \quad (3.33)$$

dentro de una misma capa, y

$$\langle \alpha, k | \beta, l \rangle = \sqrt{\frac{l!}{k!}} (\beta - \alpha)^{k-l} L_l^{(k-l)}(|\beta - \alpha|^2) \langle \alpha | \beta \rangle \quad \text{para } k \geq l. \quad (A.2)$$

Además, cada bloque de Jordan es un conjunto completo,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha, k\rangle \langle \alpha, k| = 1, \quad (3.38)$$

la cual se demuestra usando la relación

$$\left(\hat{a}^\dagger - \alpha^*\right)^k \hat{D}(\alpha) = \hat{D}(\alpha) \hat{a}^{\dagger k} \quad (3.36)$$

para conectar a los estados coherentes generalizados con la base de número mediante el operador de desplazamiento:

$$|\alpha, k\rangle = \hat{D}(\alpha) |k\rangle. \quad (3.37)$$

Bibliografía

- [1] ABRAMOWITZ, MILTON E IRENE A. STEGUN, eds. *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, ninth printing*. Dover, 1972. (8 citas en pp. 41, 46, 47, 58, 63, 64, 65, 79)
- [2] AGARWAL, G. S. Y S. CHATURVEDI. “A non group theoretic proof of completeness of arbitrary coherent states $D(\alpha)|f\rangle$ ”. *Mod. Phys. Lett. A* **11** no. 25 (1996) pp. 2083–2089. (2 citas en pp. 53, 55)
- [3] ANDREWS, GEORGE E., RICHARD ASKEY Y RANJAN ROY. *Special Functions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, tomo 71. Cambridge University Press, 1999. (1 cita en p. 71)
- [4] ARFKEN, GEORGE. *Mathematical methods for physicists*. Academic Press, 2^a ed., 1970. (1 cita en p. 41)
- [5] BARNETT, S. M. Y D. T. PEGG. “On the Hermitian Optical Phase Operator”. *J. Mod. Opt.* **36** (1989) pp. 7–19. (1 cita en p. 67)
- [6] BOITEUX, M. Y A. LEVELUT. “Semicoherent states”. *J. Phys. A* **6** no. 5 (1973) pp. 589–596. (2 citas en pp. 55, 56)
- [7] CAHILL, K. E. Y R. J. GLAUBER. “Ordered Expansions in Boson Amplitude Operators”. *Phys. Rev.* **177** no. 5 (1969) pp. 1857–1881. Apéndice B. (1 cita en p. 55)
- [8] COHEN-TANNOUJDI, CLAUDE, BERNARD DIU Y FRANCK LALOE. *Quantum mechanics*. Wiley, New York, 2^a ed., 1977. pp. 187–191. (2 citas en pp. 1, 19)
- [9] COHEN-TANNOUJDI, CLAUDE, JACQUES DUPONT-ROC Y G. GRYNBERG. *Photons and Atoms. Introduction to Quantum Electrodynamics*. Wiley-Interscience, New York, 1989. (2 citas en pp. 1, 12)
- [10] DANTAS, CÉLIA M. A., NORTON G. DE ALMEIDA Y B. BASEIA. “Statistical properties of the squeezed displaced number states”. *Braz. J. Phys.* **28** no. 4 (1998) pp. 462–469. (1 cita en p. 56)

-
- [11] DE LA PEÑA, LUIS. *Introducción a la mecánica cuántica*. FCE, México, 3ª ed., 2006. (1 cita en p. 50)
- [12] DE OLIVEIRA, F. A. M., M. S. KIM, P. L. KNIGHT Y V. BUŽEK. “Properties of displaced number states”. *Phys. Rev. A* **41** no. 5 (1990) pp. 2645–2652. (1 cita en p. 55)
- [13] DE OLIVEIRA, G. C., C. M. A. DANTAS Y J.S. SALES. “Interaction of a Two-Level Atom with a Squeezed Displaced Number State”. *Int. J. Mod. Phys. B* **21** no. 16 (2007) pp. 2723–2733. (1 cita en p. 56)
- [14] DEIFT, PERCY. *Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann-Hilbert Approach*, Courant lecture notes, tomo 3. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 2000. (1 cita en p. 71)
- [15] DIRAC, P. A. M. *The principles of quantum mechanics*. Clarendon Press, Oxford, 3ª ed., 1947. pp. 89-107. (2 citas en pp. 1, 19)
- [16] DODONOV, V. V. Y M. B. RENÓ. “Nonclassical properties of ‘semi-coherent’ quantum states”. *J. Phys. A* **39** no. 23 (2006) pp. 7411–7422. (1 cita en p. 55)
- [17] EL-ORANY, FAISAL A A. “Evolution of the superposition of displaced number states with the two-atom multiphoton Jaynes–Cummings model: interference and entanglement”. *Phys. Scripta* **74** no. 5 (2006) p. 563. (1 cita en p. 56)
- [18] EL-ORANY, FAISAL A A. “Evolution of the superposition of displaced number states with the two-atom multiphoton Jaynes–Cummings model: interference and entanglement”. *Phys. Scripta* **74** no. 5 (2006) p. 563. (1 cita en p. 56)
- [19] FRIEDBERG, STEPHEN H., ARNOLD J. INSEL Y LAWRENCE E. SPENCE. *Linear Algebra*. Prentice Hall, 4ª ed., 2003. (1 cita en p. 72)
- [20] GAUTSCHI, WALTER. *Orthogonal Polynomials, Computation and Approximation*. Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, 2004. (1 cita en p. 71)
- [21] GERRY, CHRISTOPHER C. Y PETER L. KNIGHT. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2005. (6 citas en pp. 1, 18, 28, 50, 54, 73)
- [22] GLAUBER, ROY J. “Coherent and Incoherent States of the Radiation Field”. *Phys. Rev.* **131** no. 6 (1963) pp. 2766–2788. (2 citas en pp. 28, 55)
- [23] JACKSON, JOHN DAVID. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, 3ª ed., 1999. (1 cita en p. 3)
- [24] KALNINS, E. G. *Separation of Variables for Riemannian Spaces of Constant Curvature*, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, tomo 28. Pitman, Longman, Essex, England, 1986. URL: <http://www.ima.umn.edu/~miller/variableseparation.html>. (1 cita en p. 71)

- [25] KIM, M. S., F. A. M. DE OLIVEIRA Y P. L. KNIGHT. “Properties of squeezed number states and squeezed thermal states”. *Phys. Rev. A* **40** no. 5 (1989) pp. 2494–2503. (1 cita en p. 55)
- [26] KLAUDER, JOHN R. “Continuous-Representation Theory. I. Postulates of Continuous-Representation Theory”. *J. Math. Phys.* **4** no. 8 (1963) pp. 1055–1058. (1 cita en p. 28)
- [27] KLAUDER, JOHN R. “Continuous-Representation Theory. II. Generalized Relation between Quantum and Classical Dynamics”. *J. Math. Phys.* **4** no. 8 (1963) pp. 1058–1073. (1 cita en p. 28)
- [28] KLAUDER, JOHN R. Y B. S. SKAGERSTAM. *Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics*. World Scientific Publishing, Singapore, 1985. (2 citas en pp. 28, 55)
- [29] KRÁL, P. “Kerr interaction with displaced and squeezed Fock states”. *Phys. Rev. A* **42** no. 7 (1990) pp. 4177–4192. (1 cita en p. 55)
- [30] KRÁL, P. “Displaced and squeezed Fock states”. *J. Mod. Opt.* **37** no. 5 (1990) pp. 889–917. (1 cita en p. 55)
- [31] LOUDON, RODNEY. *The quantum theory of light*. Clarendon Press Oxford University Press, Oxford New York, 1983. (1 cita en p. 1)
- [32] LVOVSKY, A. I. Y S. A. BABICHEV. “Synthesis and tomographic characterization of the displaced Fock state of light”. *Phys. Rev. A* **66** no. 1 (2002) 011801. (1 cita en p. 56)
- [33] MARCELLÁN, FRANCISCO Y WALTER VAN ASSCHE, eds. *Orthogonal Polynomials and Special Functions, Computation and Applications*, Lecture Notes in Mathematics, tomo 1883. Springer Berlin Heidelberg, 2006. (1 cita en p. 71)
- [34] MATHEWS, P. Y K. ESWARAN. “Semi-Coherent States of the Quantum Harmonic Oscillator”. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)* **17** (1973) pp. 332–335. (2 citas en pp. 55, 56)
- [35] MERZBACHER, EUGEN. *Quantum mechanics*. J. Wiley, New York, 2^a ed., 1970. pp. 326–333. (2 citas en pp. 1, 19)
- [36] MESSIAH, ALBERT. *Quantum Mechanics*, tomo I. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1961. pp. 302–307. (2 citas en pp. 1, 19)
- [37] MILLER, WILLARD. *Lie Theory and Special Functions*. Academic Press, New York, 1968. URL: <http://www.ima.umn.edu/~miller/lietheoryspecialfunctions.html>. (1 cita en p. 71)

- [38] MILLER, WILLARD. *Symmetry Groups and Their Applications*. Academic Press, New York, 1972. URL: <http://www.ima.umn.edu/~miller/symmetrygroups.html>. (1 cita en p. 71)
- [39] MOYA-CESSA, HÉCTOR Y PETER L. KNIGHT. “Series representation of quantum-field quasiprobabilities”. *Phys. Rev. A* **48** no. 3 (1993) pp. 2479–2481. (1 cita en p. 56)
- [40] OBADA, A-S F, G M ABDAL-KADER Y MAHMOUD ABDEL-ATY. “Aspects of the Two-Level Atom in Squeezed Displaced Fock States”. *Phys. Scripta* **64** no. 6 (2001) p. 573. (1 cita en p. 56)
- [41] PEGG, D. T. Y S. M. BARNETT. “Unitary Phase Operator in Quantum Mechanics”. *Europhys. Lett.* **6** no. 6 (1988) p. 483. (1 cita en p. 67)
- [42] PERELOMOV, A. M. *Generalized Coherent States and their Applications*. Springer-Verlag, Berlin New York, 1986. (2 citas en pp. 28, 55)
- [43] PLEBAŃSKI, J. “Classical Properties of Oscillator Wave Packets”. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III* **II** no. 5 (1954) pp. 213–217. (1 cita en p. 55)
- [44] PLEBAŃSKI, J. “Wave Functions of a Harmonic Oscillator”. *Phys. Rev.* **101** no. 6 (1956) pp. 1825–1826. (1 cita en p. 55)
- [45] PLEBAŃSKI, JERZY. “On Certain Wave-packets”. *Acta Phys. Polon.* **XIV** no. 4 (1955) pp. 275–293. (1 cita en p. 55)
- [46] PURCELL, EDWARD M. *Electricity and Magnetism*, Berkeley Physics Course, tomo 2. McGraw Hill, 1982. (1 cita en p. 3)
- [47] ROY, S. M. Y VIRENDRA SINGH. “Generalized coherent states and the uncertainty principle”. *Phys. Rev. D* **25** no. 12 (1982) pp. 3413–3416. (2 citas en pp. 55, 56)
- [48] SATYANARAYANA, M. VENKATA. “Generalized coherent states and generalized squeezed coherent states”. *Phys. Rev. D* **32** no. 2 (1985) pp. 400–404. (1 cita en p. 55)
- [49] SCHRÖDINGER, ERWIN. “Der Stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik”. *Naturwiss.* **14** no. 28 (1926) pp. 664–666. (1 cita en p. 28)
- [50] SCULLY, MARLAN O. Y M. SUHAIL ZUBAIRY. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997. (2 citas en pp. 1, 18)
- [51] SENITZKY, I. R. “Harmonic Oscillator Wave Functions”. *Phys. Rev.* **95** no. 5 (1954) pp. 1115–1116. (1 cita en p. 55)

-
- [52] STEINER, F. “Schrödinger’s discovery of coherent states”. *Physica B+C* **151** no. 1-2 (1988) pp. 323 – 326. (1 cita en p. 28)
- [53] SUDARSHAN, E. C. G. “Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams”. *Phys. Rev. Lett.* **10** no. 7 (1963) pp. 277–279. (1 cita en p. 28)
- [54] SZEGÖ, GABOR. *Orthogonal Polynomials*, Colloquium Publications, tomo XXIII. American Mathematical Society, 4^a ed., 1975. (2 citas en pp. 43, 72)
- [55] TALMAN, JAMES D. *Special functions; a group theoretic approach*. W. A. Benjamin, New York, 1968. Con introducción de Eugene P. Wigner. (1 cita en p. 71)
- [56] VILENKIN, N. JA. *Special Functions and the Theory of Group Representations*, Translations of Mathematical Monographs, tomo 22. American Mathematical Society, 1968. (1 cita en p. 71)
- [57] VON NEUMANN, JOHN. “Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren”. *Math. Ann.* **104** no. 1 (1931) pp. 570–578. (2 citas en pp. 1, 19)
- [58] WALDRON, SHAYNE. “Frames for vector spaces and affine spaces”. *Linear Algebra and its Applications* **435** no. 1 (2011) pp. 77 – 94. (1 cita en p. 29)
- [59] WANG, J. S., J. FENG Y M. S. ZHAN. “Quantum fluctuations of a non-dissipative mesoscopic inductance coupling circuit in a displaced squeezed Fock state”. *Phys. Lett. A* **281** no. 5-6 (2001) pp. 341–346. (1 cita en p. 56)
- [60] WÜNSCHE, A. “Displaced Fock states and their connection to quasiprobabilities”. *Quantum Semiclass. Optics* **3** no. 6 (1991) p. 359. (1 cita en p. 55)
- [61] ZHANG, WEI-MIN, DA HSUAN FENG Y ROBERT GILMORE. “Coherent states: Theory and some applications”. *Rev. Mod. Phys.* **62** no. 4 (1990) pp. 867–927. (1 cita en p. 28)